Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Рябиченко Сергей Николаевич
Должность: Директор
Дата подписания: 14.03.2022 09:51:29
Уникальный программный ключ:
3143b550cd4cbc5ce335fc548df581d670cbc4f9

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И
МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«КРАСНОДАРСКИЙ МОНТАЖНЫЙ ТЕХНИКУМ»
(ГБПОУ КК «КМТ»)

Курс лекций

по дисциплине ЕН. 01 Математика

Специальность 08.02.09
Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий

2020

Курс лекций предназначен для приобретения теоретических знаний по программе учебной дисциплины ЕН.01 Математика, составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика по специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий

Организация - разработчик:	государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Краснодарского края «Краснодарский монтажный техникум»
Составитель :	*Валуева Л.А., преподаватель математики ГБПОУ КК «КМТ»*

Пояснительная записка

Курс лекций по учебной дисциплине ЕН.01 Математика составлен в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины по специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий.

В соответствии с рабочей программой на изучение учебной дисциплины предусмотрено 80 часов, из которых 38 часов на проведение лекционных занятий.

Цель проведения лекционных занятий: формирование теоретических знаний, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Задачи:

- приобретение, формирование теоретических знаний по конкретным темам;
- выработка при изучении теоретического материала таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В программу включено содержание, направленное на формирование у обучающихся общих и профессиональных компетенций, необходимых для качественного освоения ОПОП СПО.

Код ПК, ОК	Умения	Знания
ОК 01 ОК 02 ОК 03 ОК 09 ОК 10 ОК 11 ПК 1.1 ПК 2.4 ПК 3.4 ПК 4.3	– находить производную элементарной функции; – выполнять действия над комплексными числами; – вычислять погрешности результатов действия над приближенными числами; – решать простейшие уравнения и системы уравнений; – задавать множества и выполнять операции над ними; – находить вероятность в простейших задачах; – выполнять арифметические операции с векторами; – применять ряды Фурье для некоторых функций, встречающихся в электротехнике.	– основные понятия и методы математического анализа; – методику расчета с применением комплексных чисел; – базовые понятия дифференциального и интегрального исчисления; – структуру дифференциального уравнения; – способы решения простейших видов уравнений; – определение приближенного числа и погрешностей; – понятие множества, элементов множества; способы задания множеств и операций над ними; – понятие вектора, операции с вектора-ми; применение векторов при решении задач; – элементы комбинаторного анализа; – определение вероятности, простейшие свойства

		вероятности; – понятие числового ряда, виды рядов; теорему Фурье, разложение в ряд Фурье некоторых функций.

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации. Необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.
ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 10 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранных языках.
ОК 11 Планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.
ПК 1.1 Организовывать и осуществлять эксплуатацию электроустановок промышленных и гражданских зданий.
ПК 2.4. Участвовать в проектировании силового и осветительного оборудования.
ПК 3.4. Участвовать в проектировании электрических сетей.
ПК 4.3. Участвовать в расчетах основных технико-экономических показателей.

РАЗДЕЛ 1. ПОНЯТИЕ О ЧИСЛЕ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Целые, рациональные и действительные числа. Приближенное значение величины. Абсолютная и относительная погрешности. Действия с приближенными значениями. Сравнение числовых выражений. Стандартная запись числа. Действия с числами в стандартном виде.

Число – основное понятие современной математики, позволяющее выразить результаты счета или измерения.

Числовые множества:

Множество натуральных чисел (N)

Числа вида ***N = {1, 2, 3, ...}*** называются **натуральными**. Натуральные числа появились в связи с необходимостью подсчета предметов.

Множество целых чисел (Z)

Числа вида: ***Z = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}*** называются ***целыми*** *числами,* т.е. целые числа - это натуральные числа, число 0 и числа, противоположные натуральным.

Множество рациональных чисел (Q)

Числа вида $\frac{m}{n}$*, где* ***m*** - целое число, а ***n*** - натуральное число называются **рациональными** числами. Т.е. рациональные числа – это целые числа и дробные числа.

Множество иррациональных чисел (I)

Числа, не являющиеся целыми или дробными, называются **иррациональными.** Каждое иррациональное число представляется в виде непериодической бесконечной десятичной дроби.

Множество действительных чисел (R)

Множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей называется **множеством действительных чисел**: рациональных и иррациональных.

Множество комплексных чисел (С).

Комплексное число – это число вида: $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица.

Погрешности

Результат измерения — значение величины, найденное путем ее измерения.

В системах электроснабжения измеряют ток, напряжение, активную и реактивную мощности, электроэнергию, активное, реактивное и полное сопротивление, частоту, коэффициент мощности; при энергоснабжении измеряют температуру, давление, расход энергоносителя , тепловую энергию , перемещение и др.

При проведении измерений всегда необходимо учитывать три параметра: значение; единицу измерения; ошибку измерения.

Погрешность – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Причины возникновения погрешностей:

- погрешность меры: неверное воспроизведение единицы физической величины
- неверные преобразования;
- неправильность сравнения;
- несовершенство метода измерений;
- несовершенство применяемых средств измерений;
- дефект средства измерения;
- человеческий фактор: несовершенство органов чувств оператора; его небрежности или недостаточного внимания в процессе измерений и фиксации их результатов; низкая квалификация оператора
- отклонение условий эксплуатации средства измерения от нормальных: экстремальная окружающая температура, относительная влажность, атмосферное давление; напряжение питания; частота переменного тока; нагрузка; входная и выходная мощность и др.

Абсолютная погрешность

Абсолютной погрешностью h приближения $x \approx a$ называется модуль разности между ее точным значением x и результатом измерения (***приближенным значением***) a.

$$h = |x - a|$$

Пример

В цепи сила тока $I = 10A$, а амперметр, включенный в эту цепь, показывает $I_{изм} = 10{,}15A$. Значит, абсолютная погрешность показания прибора:

$$h = |I - I_{изм}| = |10 - 10{,}15| = 0{,}15A$$

Если известно, что $\boldsymbol{h}$ (погрешность приближения) не превышает некоторую величину Δ, то эта величина Δ называется **границей абсолютной погрешности**

$$h \le \Delta \qquad \text{или} \qquad |x - a| \le \Delta$$

Если известна граница абсолютной погрешности, то пишут:

$$x = a \pm \Delta$$

По известной границе абсолютной погрешности Δ, находят границы, в которых заключено точное значение числа x.

$$a - \Delta \ \le \ x \ \le \ a + \Delta$$

Пример

Известно, что абсолютная погрешность амперметра не превышает $0{,}05A$, (т.е. $\Delta = 0{,}05$). Результат измерения показал силу тока $I_{изм} = 8{,}45A$. Значит, истинная сила тока в цепи заключена в следующих границах:

$8{,}45 - 0{,}05 \ \le \ I \ \le \ 8{,}45 + 0{,}05$, т.е.

$8{,}40\ A \le \ I \ \le \ 8{,}50A$.

Или $\quad I = 8{,}45 \pm 0{,}05\,(A)$

Относительная погрешность

Относительной погрешностью r приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности h этого числа к модулю числа a данной величины, т.е.

$$r = \frac{h}{|a|}$$

Относительная погрешность характеризует точность измерения и часто выражается в процентах.

$$r = \frac{h}{|a|} \cdot 100\%$$

Пример

В цепи сила тока $I = 10A$, а амперметр, включенный в эту цепь, показывает $I_{изм} = 10{,}14A$. Найти относительную погрешность измерения.

Решение.

Абсолютная погрешность показания прибора:

$h = |I - I_{изм}| = |10 - 10{,}14| = 0{,}14A$

Тогда относительная погрешность будет равна:

$r = \frac{h}{|a|} \cdot 100\% = \frac{0{,}14}{10{,}14} \cdot 100\% \approx 0{,}014 \cdot 100\% = 1{,}4\%$

Ответ. $\delta = 1{,}4\%$

Чем меньше относительная погрешность, тем выше качество измерений или вычислений.

В технических расчетах, относительная погрешность **более 0,5%** говорит о **низкой точности измерений**, т.е. о грубой ошибке в измерениях.

Пример

В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16см, а длина комнаты равна 730см. каково качество обоих измерений, если считать абсолютную погрешность равной 0,5см?

Решение.

Относительные погрешности измерений будут равны:

$r_1 = \frac{h}{|a_1|} \cdot 100\% = \frac{0{,}5}{16} \cdot 100\% = 0{,}03125 \cdot 100\% \approx 3{,}1\%$

$r_2 = \frac{h}{|a_2|} \cdot 100\% = \frac{0{,}5}{730} \cdot 100\% = 0{,}0006849 \cdot 100\% \approx 0{,}07\%$

Очевидно, что качество измерения длины комнаты лучше, чем качество измерений длины карандаша при одинаковой абсолютной погрешности.

Ответ. $r_1 = 3{,}1\%, \quad r_2 = 0{,}07\%$

Округление десятичных дробей

Округление десятичной дроби – отбрасывание цифр младших разрядов, начиная с некоторого.

Погрешность округления – абсолютная погрешность, полученная при округлении.

Правила округления:

1. Если первая отбрасываемая цифра 5, 6, 7, 8, 9, то предшествующая ей цифра увеличивается на единицу.
2. Если первая отбрасываемая цифра 0, 1 , 2, 3. 4, то предшествующая ей цифра не изменяется

Пример

Число 0,2473 округлить а) до тысячных, б) до сотых, в) до десятых.

Решение.

а) $0{,}2473 \approx 0{,}247$ (т.к. округляем до 0,001, то первая отбрасываемая цифра 3, значит, 7 не изменяется)

б) $0{,}2473 \approx 0{,}25$ (т.к. округляем до 0,01, то первая отбрасываемая цифра 7, значит, 4 увеличиваем на единицу, т.е. до 5)

в) $0{,}2473 \approx 0{,}2$ (т.к. округляем до 0,1, то первая отбрасываемая цифра 4, значит, 2 не изменяется)

Ответ. а) 0,247; б) 0,25; в) 0,2 .

Вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей

Вычисления можно упростить, применяя правила подсчета цифр. Это самый грубый способ. Но его точность вполне достаточна для большинства технических расчетов

Правила подсчета цифр.

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом, у которого наименьшее число десятичных знаков.
2. Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендует предыдущее правило. В окончательном результате эта запасная цифра отбрасывается.
3. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.
4. Если предложено произвести вычисления с заданной точностью, то следует округлить числа, входящие в выражение с большей точностью (хотя бы на один десятичный знак), а уже окончательное значение округлить до заданной точности.

Пример

Выполните действия с приближенными значениями чисел $145{,}561 + 43{,}4 + 0{,}15 - 5{,}035$

Решение.

В примере присутствует только сложение и вычитание, поэтому пользуемся первым правилом, не забывая про второе и третье.

Меньше всего десятичных знаков у числа 43,3 (один десятичный знак). Значит, учитывая шестое правило, все остальные слагаемые округляем до двух десятичных знаков (т.е. с одним лишним)

$$145{,}561 + \underline{43{,}4} + 0{,}15 - 5{,}035 \approx 145{,}56 + \underline{43{,}4} + 0{,}15 - 5{,}04 = 184{,}07$$

Ответ получили с двумя десятичными знаками. Т.к. один знак мы оставляли лишним для точности, то теперь его отбрасываем по правилам округления.

$$184{,}07 \approx 184{,}1$$

Т.е. ответ получили с таким же количеством десятичных знаков, как и число 43,3 (один десятичный знак)

Ответ. 184,1

Пример

Вычислите $a^2 + \sqrt{c} - a \cdot b$, если $a \approx 2{,}13, \quad b \approx 1{,}93, \quad c \approx 2{,}98$ с точностью 0,1

Решение.

Воспользуемся правилом 4. Т.е. промежуточные вычисления округлим до двух десятичных знаков (т.к. точность ответа должна быть - один десятичный знак)

$a^2 = 2{,}13^2 = 4{,}5369 \approx 4{,}54$

$\sqrt{c} = \sqrt{2{,}98} \approx 1{,}73$

$a \cdot b = 2{,}13 \cdot 1{,}93 = 4{,}1109 \approx 4{,}11$

$a^2 + \sqrt{c} - a \cdot b = 4{,}54 + 1{,}73 - 4{,}11 = 2{,}16 \approx 2{,}2$ (ответ с точностью 0,1)

Ответ. 2,2

Стандартный вид числа

Стандартный вид числа создан для удобства оперирования очень большими или очень малыми величинами, такими как: скорость света (физика, астрономия); размеры молекул, атомов и их составляющих (химия, физика); количество молекул в объекте осязаемых размеров (химия); расстояния между космическими объектами (астрономия) и др.

В электротехнике также оперируют малыми и большими величинами: заряд конденсатора, расстояние между проводами, магнитный поток, протяженность электрических сетей, напряжение, сила тока и т.д.

Число в стандартном виде: $a \cdot 10^n$,

где $1 \le a < 10,\ n \in Z$. **n** *– порядок числа*

Например,
статом = 898 755 178 736,818 Ом $\approx 8{,}98755 \cdot 10^{11}$ Ом

т.е. запись в стандартном виде гораздо компактнее, чем в обычном.

Алгоритм перевода числа в стандартный вид

1. Передвинуть десятичную запятую так, чтобы она стояла после первой значащей цифры числа. Нули, стоящие впереди значащих цифр и позади них отбросить.
2. Посчитать на сколько разрядов передвинулась запятая (это и будет число ***n***)
3. Определить направление сдвига запятой (это будет знак числа ***n***: влево – ***n*** положительное, вправо – ***n*** отрицательное).
4. Дописать к полученной записи множитель 10^n.

Пример.
Записать число в стандартном виде. *а)* –2 180 000 *б)* 0,00281
Решение.
а) $-2180000 = -2{,}18 \cdot 10^6$
Первая значащая цифра 2, поэтому передвигаем запятую на 6 позиций влево. Т.е. ***n*** = 6
б) $0{,}00396 = 3{,}96 \cdot 10^{-3}$
Первая значащая цифра 3, поэтому передвигаем запятую на 3 позиции вправо. Т.е. ***n*** = –3
Ответ.
а) $-2180000 = -2{,}18 \cdot 10^6$ *б)* $0{,}00396 = 3{,}96 \cdot 10^{-3}$

Действия с числами в стандартном виде

1. Сложение и вычитание.
при сложении и вычитании стандартных чисел показатели степеней 10 выравниваются.
Пример $4{,}5 \cdot 10^2 + 2{,}1 \cdot 10^3 = 0{,}45 \cdot 10^3 + 2{,}1 \cdot 10^3 = (0{,}45 + 2{,}1) \cdot 10^3 = 2{,}55 \cdot 10^3$

2. Умножение $\left(a \cdot 10^n\right)\cdot\left(b \cdot 10^m\right) = \left(a \cdot b\right) \cdot 10^{n+m}$
Пример $3{,}75 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^4 = \left(3{,}75 \cdot 0{,}4\right) \cdot 10^{3+4} = 1{,}5 \cdot 10^7$

3. Деление $\dfrac{a\cdot 10^n}{b\cdot 10^m}=\dfrac{a}{b}\cdot 10^{n-m}$

Пример $\dfrac{4{,}6\cdot 10^3}{2{,}5\cdot 10^6}=\dfrac{4{,}6}{2{,}5}\cdot 10^{3-6}=1{,}84\cdot 10^{-3}$

Пример

Произвести действия с числами в стандартном виде:

1) $\dfrac{0{,}08\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-7}\cdot 16\cdot 10^{-4}}=(\textit{приведем числа к стандартному виду})=$

$=\dfrac{8\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}6\cdot 10\cdot 10^{-4}}=\dfrac{8\cdot 10^{-2-2}}{(4\cdot 1{,}6)\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot 10^{-4}}=\dfrac{8\cdot 10^{-4}}{6{,}4\cdot 10^{-10}}=1{,}25\cdot 10^{-4-(-10)}=1{,}25\cdot 10^{6}$

Вопросы для закрепления материала

1. Каковы причины возникновения погрешностей?
2. Что называют абсолютной погрешностью приближенного числа?
3. Что называют относительной погрешностью приближенного числа?
4. Что характеризует относительная погрешность?
5. Каковы правила округления десятичных дробей?
6. По каким правилам выполняются сложение и вычитание приближенных чисел без подсчета погрешностей?
7. Как записывается число в стандартном виде?
8. По каким правилам выполняются сложение и вычитание чисел в стандартном виде?
9. По каким правилам выполняются умножение и деление чисел в стандартном виде?

Тема 1.2. Комплексные числа

Определение комплексного числа. Действительная и мнимая часть. Геометрическая интерпретация. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи числа. Модуль и аргументы комплексного числа. Переход из одной формы записи комплексных чисел в другую. Арифметические операции над комплексными числами. Возведение в степень.

Алгебраическая форма комплексного числа

Неразрешимость уравнения $x^2 + 1 = 0$ на множестве действительных чисел привела к введению в математику так называемой **мнимой единицы** i, т.е. мнимого (придуманного) числа, обладающего свойством:

$$i^2 = -1$$

Тогда $x^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $x_1 = i, \quad x_2 = -i$.

Числа, вида bi, где $b \in R$ называют **мнимыми числами.**

Например, $4i$, $-3i$, $0{,}45i$, $\sqrt{2}i$, и т.п.

Числа, вида $a + bi$, где $a, b \in R$ называют **комплексными числами.**

Например, $5 + 4i$, $7 - 3i$, $25 + 45i$, $-2 - \sqrt{3}i$, и т.п.

Комплексное число : $z = a + bi$,   где a и b – действительные числа, i – мнимая единица.

Форма записи $z = a + bi$ называется **алгебраической**.
a – действительная часть: Re(z) bi – мнимая часть: Im(z)

Такая запись позволят записывать не только комплексные числа, но и «*чисто мнимые*» и «*чисто действительные*»

например: $5 = 5 + 0i$ или $4i = 0 + 4i$

Во множестве комплексных чисел нет понятий «больше», «меньше», «положительное», «отрицательное».

Числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются **равными**, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$
Числа $z = a + bi$ и $-z = -a - bi$ называются **противоположными**
Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются **сопряженными**.

Например

Комплексное число z	**Равное z**	**Противоположное –z**	**Сопряженное $\bar{z}$**
$8 + 5i$	$8 + 5i$	$-8 - 5i$	$8 - 5i$
$2 - 4i$	$2 - 4i$	$-2 + 4i$	$2 + 4i$
$-6 + 0{,}9i$	$-6 + 0{,}9i$	$6 - 0{,}9i$	$-6 - 0{,}9i$

Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме

Сумма $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Разность $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Произведение $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Деление $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$ (числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю, чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе)

Пример Даны два комплексных числа $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = 6 - 9i$.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2

1) $z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (6 - 9i) = 4 + 6 + 5i - 9i = 10 - 4i$ (можно просто раскрыть скобки и сложить отдельно действительную и мнимую часть)

2) $z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (6 - 9i) = 4 - 6 + 5i + 9i = -2 + 14i$ (можно просто раскрыть скобки и вычесть отдельно действительную и мнимую часть)

3) $z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (6 - 9i) = 24 - 36i + 30i - 45i^2 =$

$$= 24 - 6i - 45 \cdot (-1) = 24 - 6i + 45 = 69 - 6i$$

(можно просто раскрыть скобки и сложить отдельно действительную и мнимую часть, но учитывая, что $i^2 = -1$)

4)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(4 + 5i) \cdot (6 + 9i)}{(6 - 9i) \cdot (6 + 9i)} = \frac{24 + 36i + 30i + 45i^2}{36 - 81i^2} = \frac{24 + 66i + 45 \cdot (-1)}{36 - 81 \cdot (-1)} =$$

$$\frac{24 + 66i - 45}{36 + 81} = \frac{-21 + 66i}{117} = -\frac{21}{117} + \frac{66}{117} i$$

(числитель и знаменатель умножаем на число, сопряженное знаменателю, т.е. на $\bar{z} = 6 + 9i$ чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе)

Комплексная плоскость. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

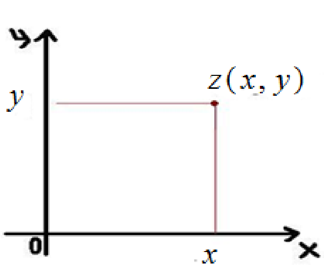
Плоскость называется **комплексной**, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точки плоскости с координатами $z(x, y)$, причем, это соответствие взаимно-однозначное.

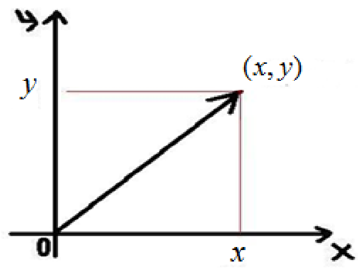
Ось OX называется **действительной** осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых $y=0$.

Ось OY называется **мнимой** осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых $x=0$.

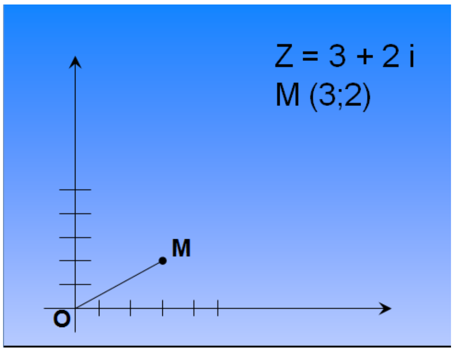
Таким образом, любое комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить на плоскости точкой с координатами (a,b), причем взаимно однозначно.

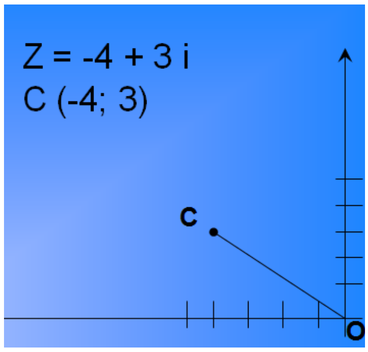
С каждой точкой $z(x,y)$ комплексной плоскости связан *радиус-вектор* этой точки.





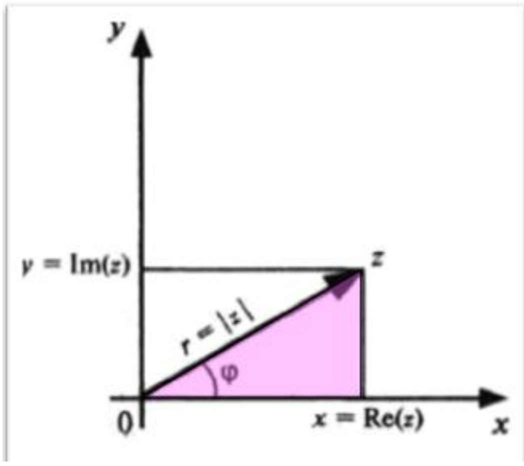
Например.





Длина r вектора, соответствующего комплексному числу Z называется **модулем** комплексного числа Z и обозначается $|z|$.

Угол φ, образованный радиус-вектором с положительным направлением оси OX, называется **аргументом** комплексного числа Z и обозначается $\arg z$.



$$\varphi=\arg z\in[-\pi;\pi] \text{ или}$$

$$\varphi=\arg z\in\left[-180^0;180^0\right]$$

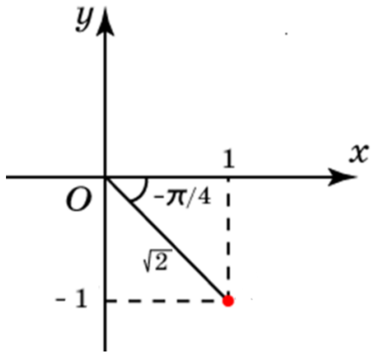
Рассматривая на чертеже выделенный треугольник, получаем соотношения:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(}\textit{из т. Пифагора}\text{)}$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r} \qquad \sin\varphi=\frac{y}{r} \qquad tg\,\varphi=\frac{y}{x}$$

Пример: Задано комплексное число $z=1-i$. Найти $|z|$ и $\arg z$.

Решение.



$z=1-i$, значит, $x=1,\quad y=-1$;

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$;

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{4}=-45^0$$

Значение аргумента находим из таблицы тригонометрических функций, находя соответствующее значение косинуса и синуса, т.е. по таблице смотрим, при каком угле (аргументе) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $r=\sqrt{2}$; $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Заменив в алгебраической форме записи комплексного числа $z=x+yi$ x и y соотношениями $x=r\cdot\cos\varphi$ $y=r\cdot\sin\varphi$, получим: $z=x+yi=r\cdot\cos\varphi+r\cdot\sin\varphi\cdot i=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, т.е. тригонометрическую форму записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма: $z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Умножение $$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\cdot i\cdot\sin\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i^2\cdot\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2))=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Деление $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Возведение в степень $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi)$ (*формула Муавра*)

<u>Показательная форма комплексного числа</u>

В 1740 году Леонард Эйлер опубликовал формулу, связывающую комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – *формула Эйлера*.

Таким образом, если комплексное число задано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, то на основании формулы Эйлера, выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим показательную форму комплексного числа:

Показательная форма: $z = r\cdot e^{i\varphi}$

Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме

$$z_1 = r_1\cdot e^{i\varphi_1} \quad \text{и} \quad z_2 = r_2\cdot e^{i\varphi_2}$$

Умножение $$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Деление $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Возведение в степень $$(z)^n = r^n\cdot e^{in\varphi}$$

Алгебраическая форма удобна при <u>сложении</u> и <u>вычитании</u>,

Показательная и тригонометрическая форма удобна при <u>умножении</u>, <u>делении, возведении в степень</u>;

Пример. Перевести в тригонометрическую и показательную форму компл. число $z = \sqrt{3} + i$.

<u>Решение</u>. У нас число задано в алгебраической форме, значит, чтобы перевести его в тригонометрическую или показательную, нужно найти r и φ

$z = \sqrt{3} + i$, значит, $x = \sqrt{3},\quad y = 1$;

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^0$$

Таким образом, тригонометрическая форма данного комплексного числа имеет вид: $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Показательная форма имеет вид: $z = r\cdot e^{i\varphi} = 2\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

Ответ. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z = 2\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

Пример. Даны два комплексных числа z_1 и z_2.

Найти $z_1\cdot z_2$, z_1 / z_2 в тригонометрической и показательной форме

$z_1 = 4(\cos 150^0 + i\cdot\sin 150^0)$ $\quad z_2 = \frac{1}{2}(\cos 90^0 + i\cdot\sin 90^0)$

Решение.

Из записи чисел имеем: $r_1 = 4,\quad r_2 = 1/2,\quad \varphi_1 = 150^0,\quad \varphi_2 = 90^0.$

Действия в тригонометрической форме:

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)) =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}(\cos(150^0+90^0) + i\cdot\sin(150^0+90^0)) = 2(\cos 240^0 + i\cdot\sin 240^0)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)) =$$

$$= 4:\frac{1}{2}(\cos(150^0-90^0) + i\cdot\sin(150^0-90^0)) = 8(\cos 60^0 + i\cdot\sin 60^0)$$

Действия в показательной форме:

Запишем числа z_1 и z_2 в показательной форме:

$$z_1 = 4e^{i\cdot 150^0} \qquad z_2 = \frac{1}{2}e^{i\cdot 90^0}$$

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{i(150^0+90^0)} = 2e^{i240^0}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=4:\frac{1}{2}e^{i\left(150^0-90^0\right)}=8e^{i60^0}$$

Как видно из примеров, показательная форма упрощает запись вычислений и оформление решения делает более компактным.

Пример. Вычислить $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{10}$.

Решение. Запишем данное комплексное число в показательной форме.

$z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, значит, $x=\sqrt{2},\quad y=-\sqrt{2}$;

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2;$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi&=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{4}=-45^0$$

Таким образом, показательная форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z=re^{i\varphi}=2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Вычислим $z^{10}=r^{10}e^{i\cdot10\varphi}=2^{10}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\cdot10\right)}$

Переведем полученный результат в алгебраическую форму $x+iy$. Для этого запишем число в тригонометрической форме и подставим значения синуса и косинуса.

$$1024e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}=1024\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1024\left(0+i\cdot(-1)\right)=-1024i.$$

Ответ: $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{10}=-1024i$

Вопросы для закрепления материала

1. Что называют мнимой единицей?
2. Какая форма записи комплексного числа называется алгебраической?
3. Что такое действительная часть?
4. Что такое мнимая часть?
5. Какие комплексные числа называются равными?
6. Какие комплексные числа называются противоположными?
7. Какие комплексные числа называются сопряженными?
8. Как выполняются сложение и вычитание комплексных чисел в алгебраической форме?
9. Как выполняется умножение комплексных чисел в алгебраической форме?
10. Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?

11. Что называют модулем комплексного числа?
12. Что называют аргументом комплексного числа?
13. По каким формулам находятся модуль и аргумент комплексного числа?
14. Как перевести комплексное число из алгебраической форме в тригонометрическую и показательную и обратно?
15. Как выполняются умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме?
16. Как выполняется возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме?

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тема 2.1. Функции одной независимой переменной. Основные элементарные функции

Аргумент и функция. Область определения и область значений функции. Способы задания функции: табличный, графический, аналитический, словесный. Свойства функции: четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

Переменная ***y*** называется **функцией** переменной ***x***, если каждому допустимому значению ***x*** соответствует единственное значение ***y***.

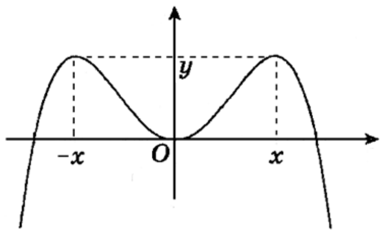
Символически то, что *y* есть функция от *x* записывается: ***y = f(x)***, где ***x***– независимая переменная (аргумент функции), ***y***– зависимая переменная (значение функции)

Функция может быть задана словестно, таблицей, графиком, аналитически (формулой)

Областью определения функции *y = f(x)* называется множество всех действительных значений ***x***, для которых функция может иметь действительное значение. Обозначается ***D(f)*** (от англ.*define* - определять)

Множеством значений функции *y = f(x)* называется множество всех действительных значений ***y***, которые она может принимать. Обозначается ***E(f)*** (от англ.*exist* - существование)

Свойства функций

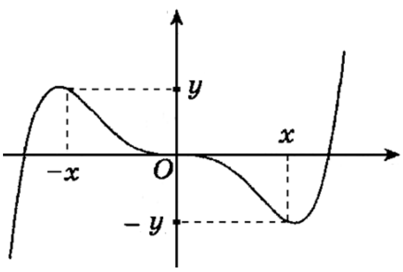


Функция ***y*** называется **четной**, если для любых значений ***x*** из области определения, при изменении знака ***x*** на противоположный значение ***y*** не изменится.

$$y(-x) = y(x).$$

т.е. для ***x***, симметричных относительно нуля, ***y*** будет одинаковым.

График четной функции симметричен относительно оси ОУ



Функция ***y*** называется **нечетной**, если для любых значений ***x*** из области определения, при изменении знака ***x*** на противоположный, значение ***y*** изменится только по знаку.

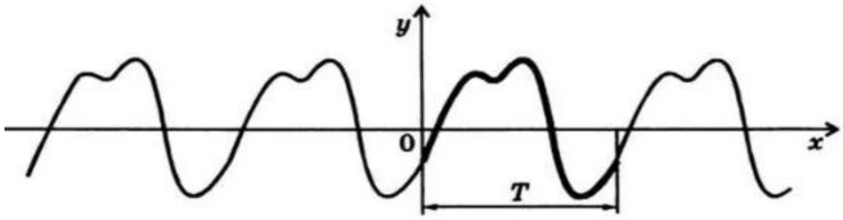
$$y(-x) = -y(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

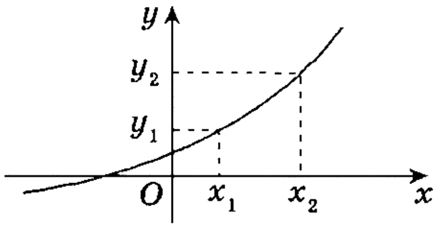
Функция общего вида– функция, которая не является ни четной, ни нечетной.

Графики этих функций либо не имеют симметрию, либо ось ***Oy*** не является осью симметрии, а начало координат центром симметрии.

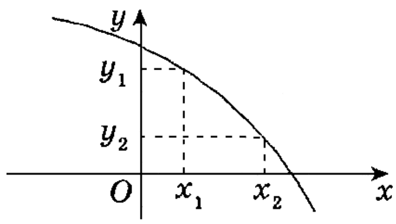
Функция **периодична**, если есть такое положительное число ***T***, что ***y(x+T)=y(x)***. График периодичной функции состоит из бесконечно повторяющихся одинаковых фрагментов



Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** функцией на отрезке $[a, b]$, если для любых x из $[a, b]$ при $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $y_1 \le y_2$



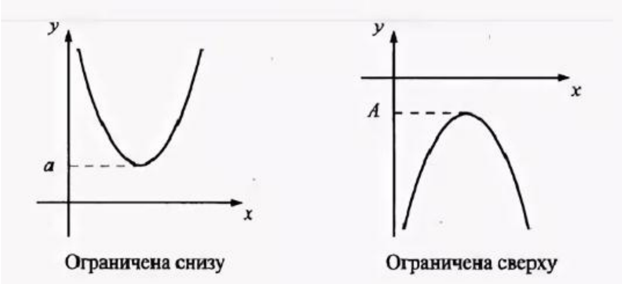
Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** функцией на отрезке $[a, b]$, если для любых x из $[a, b]$ при $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $y_1 \ge y_2$

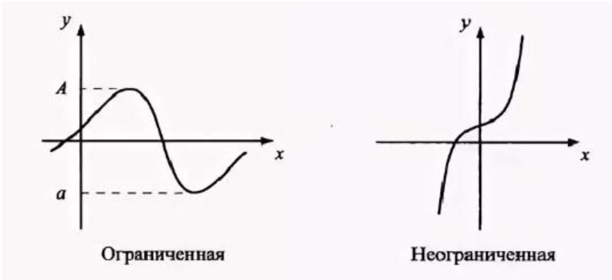


Возрастающие или убывающие функции называются **монотонными**, а промежутки, на которых функция возрастает или убывает, – **промежутками монотонности.**

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной снизу**, если для любого x из области определения функции выполняется условие ***f(x) > a***, где ***a*** – некоторое число.
График ограниченной снизу функции лежит полностью над прямой ***y = a***

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху**, если для любого x из области определения функции выполняется условие ***f(x) < a***, где ***a*** – некоторое число.
График ограниченной сверху функции лежит полностью под прямой ***y = a***



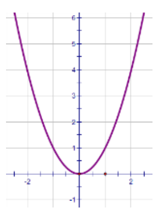
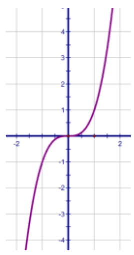
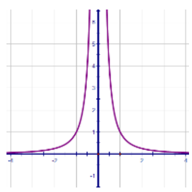
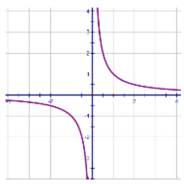
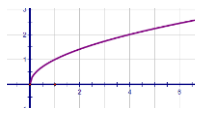
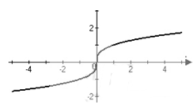


<u>Основные элементарные функции</u>

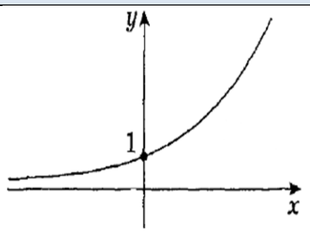
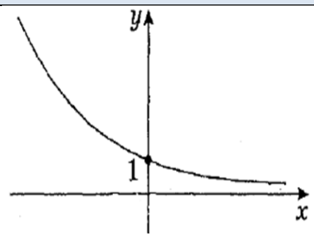
1. $\boldsymbol{y = b}$ **Постоянная.** График: <u>прямая</u>, параллельная оси OX.

2. $\boldsymbol{y = kx+b}$ **Прямая**. График: прямая

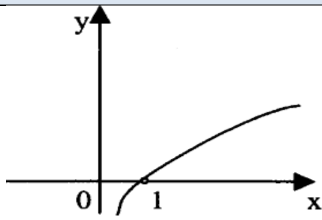
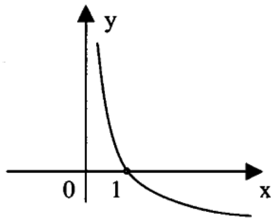
3. $\boldsymbol{y = x^n}$ **Степенная функция.** График: парабола, если n>0 или гипербола, если n<0.

$y = x^n$ ***n>0*** четное целое	$y = x^n$ ***n>0*** нечетное целое	$y = x^n$ ***n*** <0 четное целое	$y = x^n$ ***n*** <0 нечетное целое	$y = \sqrt[n]{x}$ ***n>0*** четное целое	$y = \sqrt[n]{x}$ ***n>0*** нечетное целое
					

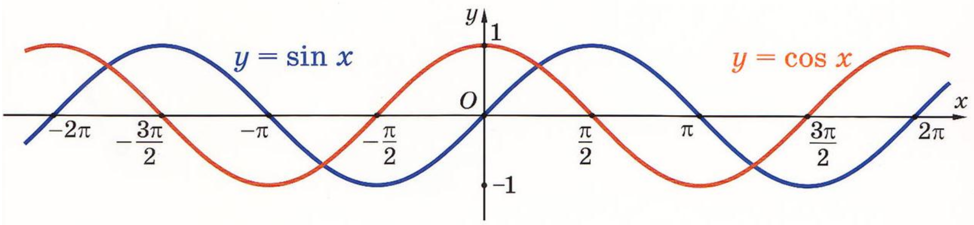
3. $\boldsymbol{y = a^x}$, a > 0, a≠ 1 **Показательная функция.** График: экспонента

$y = a^x$ $a > 1$	$y = a^x$ $0 < a < 1$
	

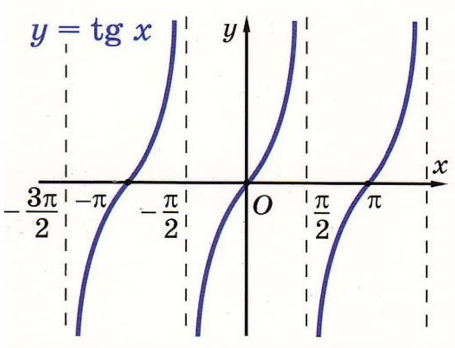
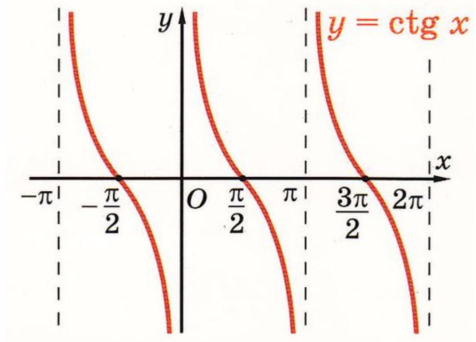
4. $\boldsymbol{y = \log_a x}$, $a > 0$, $a \neq 1$ **Логарифмическая функция.** График: <u>логарифмика</u>

$y = \log_a x \qquad a > 1$	$y = \log_a x \qquad 0 < a < 1$
	

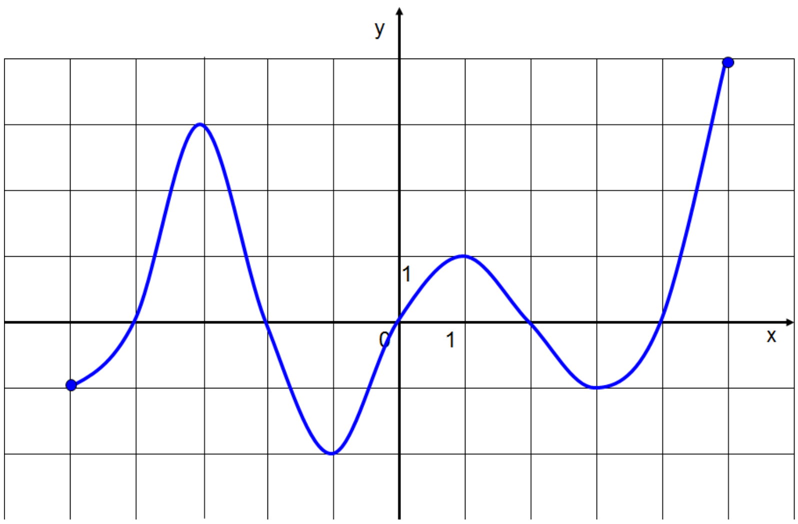
5. $\boldsymbol{y = \sin x}$, $\boldsymbol{y = \cos x}$ Тригонометрические функции синус и косинус. График: синусоида и косинусоида.



6. $\boldsymbol{y = tgx}$, $\boldsymbol{y = ctgx}$ Тригонометрические функции тангенс и котангенс. График: тангесоида и котангесоида.

$y = tgx$	$y = ctgx$
	

Пример. Установить ***по графику функции y=f(x) ее характерные свойства.***



1. D(f) = [-5; 5] (область определения).
2. E(f) = [-2; 4] (область значений).
3. Точки пересечения с осями координат
   с осью OX: (-4;0); (-2;0); (0;0); (2;0); (4;0)
   с осью OY: (0;0)
4. Промежутки знакопостоянства функции
   $y > 0 \quad при \quad x \in (-4;-2) \cup (0;2) \cup (4;5)$
   $y < 0 \quad при \quad x \in (-5;-4) \cup (-2;0) \cup (2;4)$
5. Промежутки возрастания и убывания функции.
   $y \nearrow \quad при \quad x \in (-5;-3) \cup (-1;1) \cup (3;5)$
   $y \searrow \quad при \quad x \in (-3;-1) \cup (1;3)$
6. Точки экстремума
   $x_{max} = -3 \quad x_{max} = 1$
   $x_{min} = -1 \quad x_{min} = 3$
7. Экстремумы
   $y_{max} = 3 \quad y_{max} = 1$
   $y_{min} = -2 \quad y_{min} = -1$
8. Четность, нечетность.
   Функция общего вида, т.е. не является ни четной, ни нечетной.

Вопросы для закрепления материала

1. Что называют областью определения функции?
2. Что называют областью значения функции?
3. Какие функции называют четными? Какие особенности у их графиков?
4. Какие функции называют нечетными? Какие особенности у их графиков?
5. Какие функции называют функциями общего вида? Какие особенности у их графиков?
6. Какие функции называют периодичными? Что такое период функции?
7. Что значит, что функция возрастает на промежутке?
8. Что значит, что функция убывает на промежутке?
9. Что значит, что функция ограничена сверху на промежутке? Как выглядит ее график?
10. Что значит, что функция ограничена снизу на промежутке? Как выглядит ее график?

Тема 2.2. Предел и непрерывность

Числовая последовательность и ее предел. Предел функции на бесконечности и в точке. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва первого и второго рода.

Числовые последовательности

Определение. Функция натурального аргумента n, заданная на множестве N, называется **бесконечной числовой последовательностью** и обозначается $\{a_n\}$.

Обычно числовая последовательность задается некоторой формулой: $\boxed{a_n = f(n)}$

где n – номер члена последовательности

$f(n)$ – формула общего члена последовательности.

Пример:

1. Последовательность самих натуральных чисел $\boxed{a_n = n}$

   $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, n, \ldots\}$

   $a_1 = 1 \quad a_3 = 3 \quad a_{101} = 101$

2. Последовательность квадратов натуральных чисел $\boxed{a_n = n^2}$

   $\{a_n\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots, n^2, \ldots\}$

   $a_1 = 1 \quad a_5 = 25 \quad a_9 = 81$

Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. **Пределом** функции $y = f(x)$ называется <u>число</u> A к которому неограниченно приближается значение функции, в то время, как значение аргумента неограниченно приближается к т. x_0

В символической записи $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Теорема 1 (единственности) Функция не может иметь более одного предела.

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** ***(б.м.)*** в т. $x = x_0$, если при $x \to x_0$ функция неограниченно приближается к нулю. т.е. $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0}$

Пример: Функция $y = 2^x$ является бесконечно малой при $x \to -\infty$. Т.е. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** ***(б.б.)*** в т. $x = x_0$, если при $x \to x_0$ функция неограниченно возрастает или неограниченно убывает т.е. $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty}$.

Пример: Функция $y = x$ является бесконечно большой при $x \to \infty$. Т.е. $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$

Теорема 2 Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ является ***б.м.***, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является ***б.б.*** при $x \to x_0$,

т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$

Теорема 3 Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ является ***б.б.***, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является ***б.м.*** при $x \to x_0$,

т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Теорема 4 Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если эти пределы существуют.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 5 Предел произведения функций равен произведению их пределов, если эти пределы существуют.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

(т.к. предел постоянного числа равен самому этому числу, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$)

Следствие 2. Предел степени функции равен степени предела функции

$$\lim_{x \to x_0} f^n(x) = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n$$

Теорема 6 Предел частного двух функций равен частному их пределов, если эти пределы существуют и предел делителя не ноль.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2+x-4}$.

Решение: При подстановке предельного значения аргумента $x=1$ в предельную функцию $\dfrac{x-3}{x^2+x-4}$, Получаем число 1, это и есть значение искомого предела: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2+x-4}=\dfrac{1-3}{1+1-4}=\dfrac{-2}{-2}=1$

Ответ: 1

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-3}{x-4}$.

Решение: При подстановке предельного значения аргумента $x=4$ в числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x-3}{x-4}$, получаем в числителе число 1, а в знаменателе число 0, значит, в знаменателе находится функция, стремящаяся к нулю, при $x\to4$, т.е. бесконечно малая функция. По теореме 2 получаем, что данный предел равен бесконечности: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-3}{x-4}=\dfrac{4-3}{4-4}=\left\langle\dfrac{1}{0}\right\rangle=\infty$

Ответ: ∞.

ПРАВИЛО 1

Чтобы избавиться от неопределенности $\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle$, раскладываем числитель и знаменатель дроби на множители, пользуясь либо формулами сокращенного умножения, либо формулой разложения квадратного трехчлена на множители (*см. в Приложении*). После этого сокращаем одинаковый множитель числителя и знаменателя, тем самым, избавляясь от неопределенности.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$.

Решение:

После подстановки предельного значения $x=2$ в предельную функцию $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$ получаем неопределенность $\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle$.

Далее опять подставляем $x=2$ в предельную функцию $y=\dfrac{x+2}{x+3}$ и получаем число. Предел вычислен.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+3}=\frac{2+2}{2+3}=0{,}8$$

Ответ: 0,8 .

ПРАВИЛО 2

Чтобы избавиться от неопределенности $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$ делим <u>каждое слагаемое</u> числителя и знаменателя на переменную x в самой старшей степени, в какой она встречается дроби.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-6x+3x^3}{1+5x+2x^3}$.

<u>Решение:</u> После подстановки предельного значения $x=\infty$ в предельную функцию $y=\frac{1-6x+3x^3}{1+5x+2x^3}$ получаем неопределенность $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$.

В данном случае, старшая степень переменной это x^3. После выполнения действий со степенями получаем алгебраическую сумму чисел и бесконечно малых функций. Предел бесконечно малой функции при $x\to\infty$ равен нулю, предел же числа равен этому числу.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-6x+3x^3}{1+5x+2x^3} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{6x}{x^3}+\frac{3x^3}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+\frac{5x}{x^3}+\frac{2x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^2}+3}{\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^2}+2} = \frac{0-0+3}{0+0+2} = 1{,}5$$

<u>Ответ:</u>1,5.

При вычислении пределов с неопределенностью $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$ можно заметить:

<u>В зависимости от того, где находится старшая степень, мы в итоге получаем</u>:

Число если старшая степень одинакова и в числителе и в знаменателе,

∞ если старшая степень находится в числителе

0 если старшая степень находится в знаменателе

Замечательные пределы

<u>**1-й замечательный предел**</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Следствия из первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{arctgx} = 1.$$

2-й замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{tg 5x}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{tg 5x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 0}\frac{8x\cdot\sin 8x}{8x}\cdot\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x\cdot\sin 8x}{8x}\cdot\frac{5x}{5x\cdot\sin 5x}\cdot\cos 5x=$$

$$\frac{8}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 5x=\frac{8}{5}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{8}{5}=1{,}6$$

Ответ: 1,6.

Пример.

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x-4}{9x+2}\right)^{5x-3}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x-4}{9x+2}\right)^{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x+2)-2-4}{9x+2}\right)^{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x+2)-6}{9x+2}\right)^{5x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x+2)}{9x+2}+\frac{-6}{9x+2}\right)^{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{9x+2}{-6}}\right)^{5x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{9x+2}{-6}}\right)^{\frac{9x+2}{-6}\cdot\frac{-6}{9x+2}\cdot(5x-3)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{9x+2}{-6}}\right)^{\frac{9x+2}{-6}\cdot\frac{-30x+18}{9x+2}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{9x+2}{-6}}\right)^{\frac{9x+2}{-6}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-30x+18}{9x+2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-30x+18}{9x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-30x}{x}+\frac{18}{x}}{\frac{9x}{x}+\frac{2}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-30+\frac{18}{x}}{9+\frac{2}{x}}}=e^{\frac{-30+0}{9+0}}=e^{\frac{-30}{9}}=e^{-\frac{10}{3}}$$

Ответ: $e^{-\frac{10}{3}}$.

Непрерывность функции

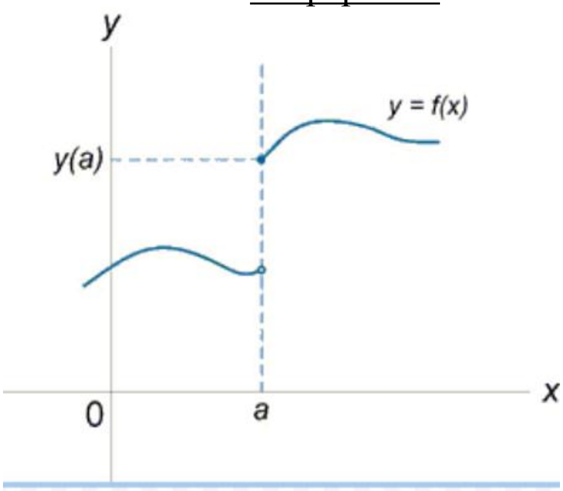
Опр. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a **,** если выполняются три условия одновременно:

1. $y(x)$ определена в точке a**.** Т.е. существует $y(a)$
2. Существуют конечные односторонние пределы
$\lim\limits_{x\to a_-} y(x)$ и $\lim\limits_{x\to a_+} y(x)$
3. Выполняется равенство $y(a) = \lim\limits_{x\to a_-} y(x) = \lim\limits_{x\to a_+} y(x)$

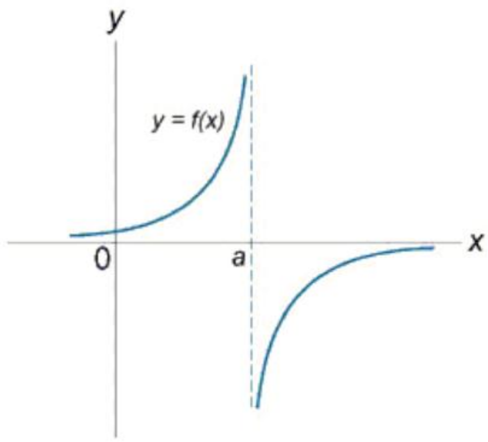
Если не выполняется хотя бы одно условие, то говорят, что в т. $x = a$ **функция терпит разрыв**, при этом:

- Если выполняется второе условие, то говорят, что разрыв I рода.
- Если хотя бы один из односторонних пределов равен ∞, то говорят, что разрыв II рода.

Теорема. Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то она непрерывна на этом промежутке.



Точка разрыва 1-го рода



Точка разрыва 2-го рода

Пример.
Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 2x, & x \le -3 \\ x^2 + 1, & -3 < x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

Решение:
Очевидно, что кусочно-определенная функция непрерывна ка промежутках $(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;\infty)$, т.к. на этих промежутках функция задана непрерывными элементарными функциями. Поэтому, исследуем на непрерывность точки $x = -3$ и $x = 1$.

а) ***x* = –3**

1) $y(-3) = (-3)^2+1 = 10$ Значит, функция определена в точке ***x* = –3**

2) Найдем односторонние пределы в этой точке

$$\lim_{x \to -3_-} 2x = 2 \cdot (-3) = -6$$

$$\lim_{x \to -3_+} (x^2+1) = (-3)^2 + 1 = 10$$, значит, односторонние пределы существуют

3) Проверим, выполняется ли условие

$$y(-3) = \lim_{x \to -3_-} y(x) = \lim_{x \to -3_+} y(x)$$

10 = –6 = 10 Очевидно, что не выполняется.

<u>Вывод</u>: Функция не является в т. ***x* = – 3** непрерывной, т.к. не выполняется 3 условие непрерывности. Но, т.к. выполняется 2 условие, то можно сказать, что в т. ***x* = – 3** функция **терпит разрыв I рода.**

б) ***x* = 1**

1) $y(1) = 1^2+1 = 2$ Значит, функция определена в точке ***x* = 1**

2) Найдем односторонние пределы в этой точке

$$\lim_{x \to 1_-} (x^2+1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1_+} 2x = 2 \cdot 1 = 2$$, значит, односторонние пределы существуют

3) Проверим, выполняется ли условие

$$y(1) = \lim_{x \to 1_-} y(x) = \lim_{x \to 13_+} y(x)$$

2 = 2 = 2 Очевидно, что выполняется.

<u>Вывод</u>: Функция является в т. ***x* = 1** непрерывной, т.к. выполняются все 3 условия непрерывности.

<u>Ответ</u>. Функция непрерывна при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$. В т. ***x* = – 3** функция терпит разрыв I рода

Вопросы для закрепления материала

1. Что называют числовой последовательностью?
2. Что называют пределом функции?
3. Какие функции называют бесконечно малыми в точке или на бесконечности?
4. Какие функции называют бесконечно большими в точке или на бесконечности?
5. Как избавиться от неопределенности $\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$

6. Как избавиться от неопределенности $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$
7. Что называют 1-м замечательным пределом?
8. Что называют 2-м замечательным пределом?
9. Какие условия непрерывности функции в точке?
10. Что такое разрыв I рода функции в точке?
11. Что такое разрыв II рода функции в точке?

Тема 3.1. Матрицы и определители

Понятие матрицы. Типы матриц. Действия с матрицами: сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на число, транспонирование матриц, умножение матриц, возведение в степень. Определитель квадратной матрицы. Определители 1-го, 2-го, 3-го порядков. Правило Саррюса. Свойства определителей.

Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$, где числа a_{ij} называются элементами матрица.

Эта матрица имеет m строк и n столбцов.

Если $m = n$, то матрица называется квадратной, порядка n.

Если $m \neq n$, то матрица называется прямоугольной размера $m \times n$.

Квадратная матрица имеет определитель, который обозначим ΔA. Если $\Delta A \neq 0$, то матрица A называется ***невырожденной***, Если $\Delta A = 0$, то матрица A называется ***вырожденной***.

Две матрицы A и B считаются ***равными***, если:

1) А и В одинакового размера;
2) Соответствующие элементы совпадают, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$

Матрица $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ у которой все диагональные элементы равны 1, а все остальные элементы равны нулю, называется ***единичной***.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***0-матрица***.

Действия над матрицами

1. Чтобы ***умножить матрицу на число***, надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$c\cdot A=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Чтобы ***сложить*** (***вычесть***) ***две матрицы*** одинаковых размеров, нужно сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц.

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23} \\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33} \end{pmatrix}$$

3. ***Матрицу A можно умножить на матрицу B*** только в том случае, когда число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*. Умножение проводится по правилу **«строка на столбец»**.

Пусть даны матрица *A* размера $m \times n$ и матрица *B* размера $n \times k$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ будет иметь размер $m \times k$ и элемент c_{ij} этой матрицы равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,0\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\,2\,1 \\ 0\,4\,2 \\ 1\,0\,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot4+3\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot7 \\ 2\cdot5+0\cdot0+1\cdot1 & 2\cdot2+0\cdot4+1\cdot0 & 2\cdot1+0\cdot2+1\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 26 \\ 11 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Формула ***возведения матрицы в степень*** работает только для квадратных матриц и натуральной степени: $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\ раз}$

Другими словами, для того, чтобы выполнить возведение матрицы в степень ***n*** нужно умножить её саму на себя ***n*** раз.

При возведении в степень матрицу удобно применять свойство: $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$

Пример. Для матриц *A* и *B* найти матрицы $C = 3 \cdot A + 4 \cdot B$ и $D = A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 10 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 3 & 12 & 0 \\ 24 & 21 & 15 \end{pmatrix}$$

$$4B = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 10 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -8 & 36 \\ 40 & 12 & 20 \\ 0 & -16 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = 7 \cdot A + 4 \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 3 & 12 & 0 \\ 24 & 21 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & -8 & 36 \\ 40 & 12 & 20 \\ 0 & -16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+24 & -3-8 & 9+36 \\ 3+40 & 12+12 & 0+20 \\ 24+0 & 21-16 & 15+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -11 & 45 \\ 43 & 24 & 20 \\ 24 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 10 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 6+(-1)\cdot 10+3\cdot 0 & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+3\cdot(-4) & 2\cdot 9+(-1)\cdot 5+3\cdot 1 \\ 1\cdot 6+4\cdot 10+0\cdot 0 & 1\cdot(-2)+4\cdot 3+0\cdot(-4) & 1\cdot 9+4\cdot 5+0\cdot 1 \\ 8\cdot 6+7\cdot 10+5\cdot 0 & 8\cdot(-2)+7\cdot 3+5\cdot(-4) & 8\cdot 9+7\cdot 5+5\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

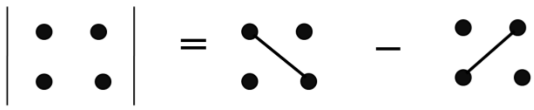
$$= \begin{pmatrix} 12-10+0 & -4-3-12 & 18-5+3 \\ 6+40+0 & -2+12+0 & 9+20+0 \\ 48+70+0 & -16+21-20 & 72+35+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -19 & 16 \\ 46 & 10 & 29 \\ 118 & -15 & 112 \end{pmatrix}$$

<u>Ответ:</u> $C = \begin{pmatrix} 30 & -11 & 45 \\ 43 & 24 & 20 \\ 24 & 5 & 19 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & -19 & 16 \\ 46 & 10 & 29 \\ 118 & -15 & 112 \end{pmatrix}$

<u>Определители</u>

Определителем **второго порядка** называется **число**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$



где

a_{ij} – элементы определителя.

ij - двойной индекс.

i– номер строки, а *j*– номер столбца на пересечении которых находится элемент.

Пример $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 2\cdot(-3) = 20 + 6 = 26$.

Определителем **третьего порядка** называется **число**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример Вычислить определитель 3-го порядка по определению

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot(-3)\cdot 4 + 0\cdot(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot 3\cdot 4 - 0\cdot 2\cdot 5 - (-3)\cdot(-2)\cdot 1 =$$

$$= 15 - 24 + 0 + 12 - 0 - 6 = -3$$

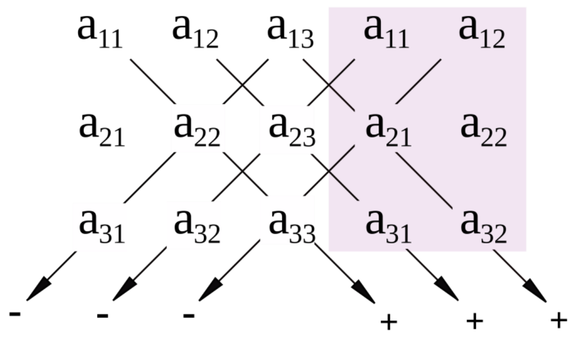
Правило Саррюса

Правило Саррюса— метод вычисления определителя матрицы третьего порядка. Призвано внести в процесс вычисления определителя наглядность, уменьшив тем самым вероятность возникновения ошибки. Названо по имени французского математика *Пьера Фредерика Саррюса*.

Для матрицы 3х3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Определитель находится суммированием шести произведений из трёх элементов. Действие выполняется согласно следующей схеме:

Первые два столбца матрицы записываются справа возле матрицы. Произведения элементов, стоящих на линиях с пометкой «+», складываются, затем из результата вычитаются произведения элементов, находящихся на линиях с пометкой «–»:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример Вычислить определитель 3-го порядка применяя правило Саррюса

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -2 \end{matrix} =$$

$$= 1\cdot3\cdot5 + 2\cdot(-3)\cdot4 + (-1)\cdot0\cdot(-2) - 2\cdot0\cdot5 - 1\cdot(-3)\cdot(-2) - (-1)\cdot3\cdot4 =$$

$$= 15 - 24 + 0 - 0 - 6 - (-12) = -3$$

Вопросы для закрепления материала

1. Что называют числовой матрицей?
2. Что такое размерность матрицы?
3. Какую матрицу называют квадратной?
4. Какую матрицу называют единичной?

5. Какую матрицу называют 0-матрицей?
6. Как происходит сложение матриц? Любые ли матрицы можно сложить?
7. Как происходит умножение матриц? Любые ли матрицы можно умножить?
8. Как матрицу возводить в степень?
9. Что называют определителем второго порядка?
10. Что называют определителем третьего порядка?
11. Какой метод вычисления определителей называется Правилом Саррюса?

Тема 3.2. Системы линейных уравнений

Основные понятия и определения: общий вид системы линейных уравнений с 3-мя переменными. Совместные определенные, совместные неопределенные, несовместные системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы.

Системы линейных уравнений. Основные понятия

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных $i = 1,\ 2,\ \ldots\ m; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ n$

b_k – свободные члены

Все значения всех переменных, при которых одновременно все уравнения системы превращаются в верные числовые равенства, называется **решением данной системы**.

Система **совместна**, если она имеет решение.

Система **несовместна**, если она не имеет решения

Система **определена**, если она имеет единственное решение.

Исследование и решение системы требует ответа на три вопроса:

1. Имеет система решение или система решений не имеет (т.е. совместна она или несовместна);
2. Имеет ли система единственное решение или бесконечно много решений (т.е. определена она или неопределена);
3. Каково решение, если оно существует.

Две системы называются **равносильными**, если все решения одной являются решениями другой и, наоборот, все решения другой системы являются решениями первой.

Теоремы о равносильности систем линейных уравнений

Теорема 1. Любое из уравнений системы можно заменить равносильным ему уравнением. Полученная в результате этого система, будет равносильная данной.

Теорема 2. Любое из уравнений системы можно заменить уравнением, полученным путем сложения исходного уравнения с другим уравнением системы. Полученная в результате этого система будет равносильной данной.

Теорема 3. Можно из одного уравнения системы выразить какое-нибудь неизвестное через другие неизвестные и подставить это выражение в другие уравнения. Новые уравнения вместе с первым образуют систему, равносильную данной.

Методы решения систем линейных уравнений

Способ подстановки

Если из одного уравнения системы какое-либо из неизвестных выразить через другие и подставить это выражение в другие уравнения, то получим систему с меньшим количеством уравнений и неизвестных. Продолжая таким образом, можно получить в конце концов уравнение с одним неизвестным. Из него найдем значение этого неизвестного и, подставляя это значение в предыдущие выражения, получим значения всех переменных.

Пример .Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

Решение.

Решим систему **способом подстановки**.

Из первого уравнения выразим переменную ***x***:

$$x = \frac{11 + 2y}{3}$$

Подставив это значение во второе уравнение, получим уравнение с одним неизвестным ***y*** :

$4 \cdot \frac{11 + 2y}{3} - 5y = 3$, откуда $y = 5$

Подставив ***y*** = 5 в выражение для ***x***, получим:

$x = \frac{11 + 2 \cdot 5}{3}$, откуда $x = 7$.

Ответ: x=7 , $y = 5$

Метод Гаусса

Последовательно исключают переменные и сводят систему к треугольному виду.

Треугольный вид системы – когда нижележащее уравнение системы содержит, по крайней мере, на одну неизвестную меньше, чем вышележащее.

Пример.

Найти общее решение системы: $\begin{cases} x+7y-5z=-9 \\ -2x+5y-6z=-8 \\ 4x+2y-z=-12 \end{cases}$

Решение.

С помощью операций умножения уравнения на число и алгебраического сложения двух уравнений заменим два из уравнений системы на уравнения, не содержащее переменную ***x***.

Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим его со вторым уравнением. Таким образом, мы уравняем коэффициенты при ***x***. Они станут равны по модулю и разные по знаку, поэтому при сложении уравнений слагаемые, содержащие переменную ***x*,** взаимно уничтожатся:

$$\begin{array}{r} 2x+14y-10z=-18 \\ -2x+\ \ 5y-6z=-8 \\ \hline 19y-16z=-26 \end{array}$$

Теперь в систему вместо второго уравнения запишем новое уравнение.

$$\begin{cases} x+7y-5z=-9 \\ 19y-16z=-26 \\ 4x+2y-z=-12 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-4) и сложим его с третьим уравнением.

$$\begin{array}{r} -4x-28y+20z=36 \\ 4x+\ 2y-\ z=-12 \\ \hline -26y+19z=24 \end{array}$$

Теперь в систему вместо третьего уравнения запишем новое уравнение.

$$\begin{cases} x+7y-5z=-9 \\ 19y-16z=-26 \\ -26y+19z=24 \end{cases}$$

Итак, имеем систему с двумя уравнениям, где нет переменной ***x***.

Аналогичные операции проведем с третьим и вторым уравнением, чтобы получить уравнение, не содержащее переменную ***y***.

Умножим второе уравнение новой системы на 26 и сложим его с третьим уравнением, умноженным на 19.

$$\begin{array}{r} 494y-416z=-676 \\ -494y+361z=456 \\ \hline -55z=-220 \end{array}$$

Теперь в систему вместо третьего уравнения запишем новое уравнение.

$$\begin{cases} x+7y-5z=-9 \\ 19y-16z=-26 \\ -55z=-220 \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим:

$-55z=-220$

$z=4$

Подставляем значение $z=4$ во второе уравнение:

$19y-16z=-26$

$19y-64=-26$

$y=2$

Подставляем значения $z=4$ и $y=2$ в первое уравнение:

$x+7y-5z=-9$

$x+14-20=-9$

$x=-3$

Ответ. $x=-3$, $y=2$, $z=4$.

Метод Крамера

заключается в следующем:

Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

1. Составляем главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Вычисляем его.

   Если $\Delta \neq 0$, значит, система совместна и определена, т.е. имеет единственное решение.
2. Вычисляются вспомогательные определители Δ_i, которые составляются из главного определителя Δ заменой столбца $\boldsymbol{i}$ на столбец свободных членов.
3. По формулам Крамера находятся неизвестные: $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

Пример Найти решение системы: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 16 \end{cases}$

Решение.

1. Составим определитель из коэффициентов при неизвестных (главный определитель):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

Так как главный определитель не равен нулю, то система имеет единственное решение.

2. Находим вспомогательные определители: Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя последовательно в главном определителе столбцы на числа, стоящие в правой части каждого из уравнений (столбец свободных членов)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 & 5 \\ -7 & 4 & -3 \\ 16 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 5 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 16 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ -1 & 4 & -7 \\ 2 & -3 & 16 \end{vmatrix} = 32.$$

3. Получаем единственное решение системы по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{16} = 0, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2.$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Вопросы для закрепления материала

1. Что называют системой линейных уравнений (СЛУ)?
2. Какие СЛУ называют совместными?
3. Какие СЛУ называют несовместными?
4. Какие СЛУ называют определенными?
5. Какие действия с СЛУ приводят к равносильными СЛУ?
6. В чем заключается метод Гаусса?
7. В чем заключается метод Крамера?

РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

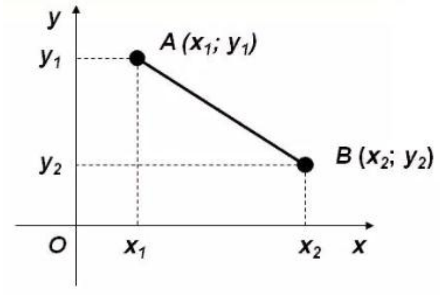
Тема 4.1. Векторы

Понятие вектора. Координаты и длина вектора. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Расстояние между двумя точками на плоскости. Скалярное произведение векторов. Углы, образуемые вектором с осями координат. Углы между векторами. Коллинеарность и перпендикулярность векторов

Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

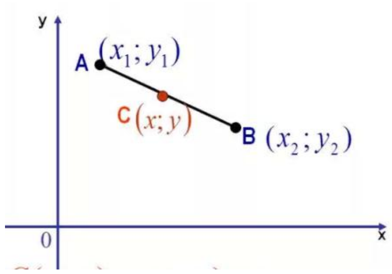
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Таким образом можно вычислять длину отрезка *AB*



Координаты середины отрезка *AB*

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

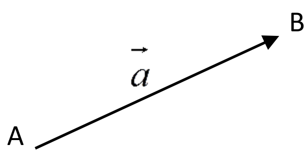


<u>Векторы</u>

Величины	
скалярные	**векторные**
Числовое значение	Числовое значение и <u>направление</u>
масса, время, температура и т.д.	*скорость, сила, центробежное ускорение* и т.д.

Вектор – отрезок, для которого указано направление (т.е. указано начало отрезка и его конец).

Изображается в виде направленного отрезка и <u>обозначается</u> $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$

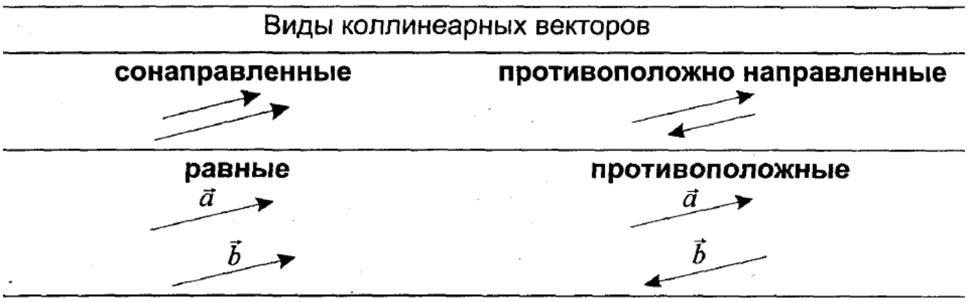


Нулевой вектор – вектор, у которого конец совпадает с началом. Обозначается точкой. Записывается $\vec{0}$. Направление не определено.

Длина вектора это длина отрезка изображающего вектор. Обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$, поэтому **длину** вектора часто называют **модулем** вектора. Длина вектора не зависит от его направления. Длина нулевого вектора равна нулю.

Коллинеарные вектора – векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.



Равные векторы – сонаправленые векторы одинаковой длины.

Координаты вектора определяются разностями между координатами конца и начала вектора:

Если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то $\vec{a} = (a_x,\ a_y) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$

У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны.

Т.е. если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ <u>коллинеарны</u>, т о $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$

Длина вектора $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Действия с векторами

Пусть есть исходные вектора $\vec{a} = (x_a,\ y_a)$ и $\vec{b} = (x_b,\ y_b)$

1. **Умножение вектора на число**: $\lambda\vec{a} = (\lambda x_a,\ \lambda y_a)$
(умножаем каждую координату вектора на число)

2. **Сложение векторов** $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b,\ y_a + y_b)$
(складываем соответствующие координаты векторов)

3. **Вычитание векторов** $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (x_a - x_b,\ y_a - y_b)$
(вычитаем соответствующие координаты векторов)

4. **Скалярное произведение векторов** – это <ins>число</ins>

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$$, где φ – угол между векторами

Свойства скалярного произведения

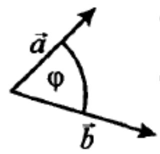
1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$
2. $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$, отсюда
3. **<ins>угол между векторами</ins>**: $\varphi=\arccos\left(\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\right)$

   или в координатной форме $\cos\varphi=\dfrac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}}$

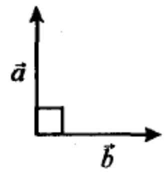
4. <ins>Условие перпендикулярности двух векторов</ins> ($\varphi=90^0$)

   $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ или в координатной форме $x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b=0$

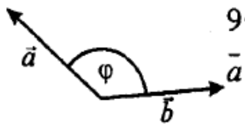
5. Связь между знаком скалярного произведения двух векторов и угла между ними



$0°\le\varphi<90°$
$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$



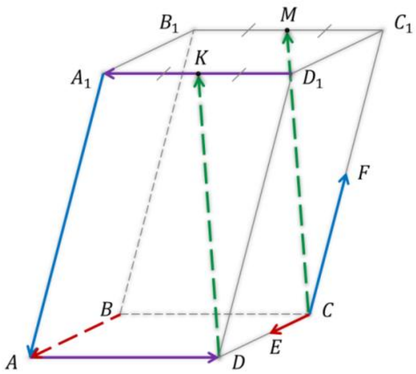
$\varphi = 90°$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$



$90°<\varphi\le180°$
$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$

Пример

Пользуясь данными рисунка, укажите для пары векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CE}$ правильный вариант ответа и пояснение:



а) сонаправленные
б) равные
в) противоположно направленные
г) противоположные

Решение.

Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CE}$ лежат на параллельных ребрах параллелепипеда, направлены в одну сторону, но не равны по длине, значит, они просто сонаправленные.

Ответ. а) сонаправленные

Пример Даны точки $A(1;\ 2)$, $B\ (-1;\ 5)$, $C(-1;\ 2)$

Найти координаты и модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

Решение.

1. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A,\ y_B-y_A\right)=\left(-1-1,\ 5-2\right)=\left(-2,\ 3\right)$$

2. Найдем координаты вектора $\overline{CA}$

$$\overrightarrow{CA}=\left(x_A-x_C,\ y_A-y_C\right)=\left(-1-1,\ 2-2\right)=\left(-2,\ 0\right)$$

Ответ. $\overrightarrow{AB}=\left(-2,\ 3\right)$; $\overrightarrow{CA}=\left(-2,\ 0\right)$

Пример Даны векторы $\overline{a}(5;-2)$ и $\overline{b}(-2;-1)$. Найти координаты вектора $\overline{c}=2\overline{a}-6\overline{b}$

Решение.

$$\overline{c}=2\overline{a}-6\overline{b}=2\cdot(5;-2)-6\cdot(-2;-1)=(10;-4)-(-12;-6)=(10+12;\ -4+6)=(22;\ 2)$$

Ответ. $\overline{c}=2\overline{a}-6\overline{b}=(22;\ 2)$

Пример Даны векторы $\overline{a}(-3;\ 6)$ и $\overline{b}(8;-3)$. Найдите их скалярное произведение.

Решение.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(-3,6\right)\cdot\left(8,-3\right)=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b=-3\cdot 8+6\cdot\left(-3\right)=-24-18=-42$$

Ответ. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-42$

Пример Даны точки $A(1;\ 2)$, $B\ (-1;\ 5)$, $C(-1;\ 2)$

Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

Решение.

1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A,\ y_B-y_A\right)=\left(-1-1,\ 5-2\right)=\left(-2,\ 3\right)$$

$$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C,\ y_A - y_C) = (-1-1,\ 2-2) = (-2,\ 0)$$

2. Найдем скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = (-2, 3) \cdot (-2, 0) = -2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$$

3. Найдем длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\left|\overline{CA}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$$

4. Найдем косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CA}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{CA}\right|} = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

<u>Ответ</u>. $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

Вопросы для закрепления материала

1. Какие величины называют скалярными?
2. Какие величины называют векторными?
3. Что такое вектор?
4. Какой вектор называют нулевым?
5. Что такое длина вектора и по какой формуле она вычисляется?
6. Какие векторы называют коллинеарными?
7. Какие векторы называют сонаправленными?
8. Какие векторы называют равными?
9. Какие векторы называют противоположно направленными?
10. Какие векторы называют противоположными?
11. Как вычисляются координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
12. Какова связь коллинеарности векторов и пропорциональности их координат?
13. Как умножить вектор на число?
14. Как сложить вектора?
15. Как вычесть вектора?
16. Что такое скалярное произведение векторов?
17. Какова связь между коллинеарностью векторов и их скалярными произведением?

18. Какова связь между перпендикулярностью векторов и их скалярными произведением?
19. Как вычисляется угол между векторами?

Тема 4.2. Уравнения прямой на плоскости. Кривые второго порядка

Общее уравнение прямой. Векторное и каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола

Уравнение прямой на плоскости

1. Общее уравнение прямой $\boxed{Ax + By + C = 0}$

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $\boxed{y = kx + b}$

где $k = tg\alpha$ – угловой коэффициент прямой

b – отрезок, отсекаемый ею на оси OY

3. Каноническое уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ **и параллельно вектору** $\bar{s} = (m, n)$ (*направляющий вектор прямой*)

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

4. Уравнение прямой в отрезках $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

где a, b – длины отрезков, отсекаемых
на осях координат, взятые с соответствующими знаками

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ **с данным угловым коэффициентом** $\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1)$ **и** $B(x_2, y_2)$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Угол между прямыми

Пусть имеются две прямые: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, тогда угол φ между ними находится по формуле: $\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}}$

Отсюда,

<u>Условие параллельности прямых</u>: $\boxed{k_1 = k_2}$

<u>Условие перпендикулярности прямых</u>: $\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,1)$ и параллельной вектору $\bar{s}=(4,-5)$

Решение.

Используя *уравнение прямой, проходящей через данную точку* $M(x_0,y_0)$ *и параллельно вектору* $\bar{s}=(m,n)$ (**№ 3**) найдем искомое уравнение:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-5}$$

$$-5\cdot(x-2)=4\cdot(y-1)$$

$$-5x+10=4y-4$$

$-5x-4y+14=0$ общее уравнение данной прямой (**№ 1**)

$y=-\frac{5}{4}x+\frac{14}{4}$ уравнение с угловым коэффициентом данной прямой (**№ 2**)

Ответ. $-5x-4y+14=0$ или $y=-\frac{5}{4}x+\frac{14}{4}$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1,-2)$ и $D(3,4)$

Решение.

Используя *уравнение прямой, проходящей через две точки* (**№ 6**) найдем искомое уравнение:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-2)}{4-(-2)}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{6}$$

$$6\cdot(x-1)=2\cdot(y+2)$$

$$6x-6=2y+4$$

$6x-2y-10=0$ общее уравнение данной прямой (**№ 1**)

$y=-3x-5$ уравнение с угловым коэффициентом данной прямой (**№ 2**)

Ответ. $6x-2y-10=0$ или $y=-3x-5$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 2)$ и параллельной прямой $y = 5x + 4$

Решение.

Т.к. прямые параллельны, то их угловые коэффициенты должны быть равны.

Угловой коэффициент прямой $y = 5x + 4$ равен $k_1 = 5$

Значит, и у искомой прямой угловой коэффициент равен $k_2 = 5$.

Используя *уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом (№ 5)* найдем искомое уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Прямая проходит через точку $A(3, 2)$, значит, $x_0 = 3$ и $y_0 = 2$

$$y - 2 = 5(x - 3)$$

$$y - 2 = 5x - 15$$

$$y = 5x - 13$$

Ответ. $y = 5x - 13$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точку $D(-6, 4)$ и перпендикулярно прямой $y = 2x - 3$

Решение.

Т.к. прямые перпендикулярны, то соотношение между их коэффициентами:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Угловой коэффициент прямой $y = 2x - 3$ равен $k_1 = 2$

Значит, и у искомой прямой угловой коэффициент равен $k_2 = -\frac{1}{2}$.

Используя *уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом* **(№ 5)** найдем искомое уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Прямая проходит через точку $D(-6, 4)$, значит, $x_0 = -6$ и $y_0 = 4$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 6)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Ответ. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Пример

На плоскости дан треугольник с вершинами в точках *A*, *B* и *C*. Найти:

а) *длину стороны AB*;
б) *уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты*;
в) *внутренний угол B*;

A(3; -3) B(6; 1) C(7; -1)

Решение.

а) найдем длину стороны *AB* по формуле расстояние между точками:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(6-3)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

б) Найдем уравнения сторон *AB и BC* и их угловые коэффициенты.

Используя *уравнение прямой, проходящей через две точки* найдем уравнение *AB* :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-(-3)}{1-(-3)}$$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+3}{4}$$

$$4 \cdot (x-3) = 3 \cdot (y+3)$$

$$4x - 12 = 3y + 9$$

$$3y = 4x - 21$$

$y = \frac{4}{3}x - 7$ уравнение прямой *AB*

Значит, угловой коэффициент прямой *AB* равен $k_1 = \frac{4}{3}$

Используя *уравнение прямой, проходящей через две точки* найдем уравнение *BC* :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x-6}{7-6}=\frac{y-1}{-1-1}$$

$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-1}{-2}$$

$$-2\cdot(x-6)=1\cdot(y-1)$$

$$-2x+12=y-1$$

$y=-2x+13$ уравнение прямой BC

Значит, угловой коэффициент прямой *BC* равен $k_2=-2$

в) *Найдем внутренний угол B*;

Внутренний угол *B* это угол между прямыми *AB и BC*

Тангенс угла между прямыми вычисляется по формуле

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

$$tg\varphi=\frac{-2-\frac{4}{3}}{1+(-2)\cdot\frac{4}{3}}=\left(-2-\frac{4}{3}\right):\left(1+(-2)\cdot\frac{4}{3}\right)=-\frac{10}{3}:\left(\frac{3}{3}-\frac{8}{3}\right)=-\frac{10}{3}:\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{5}=2$$

$\varphi=arctg(2)$ угол между прямыми *AB и BC*

Ответ.

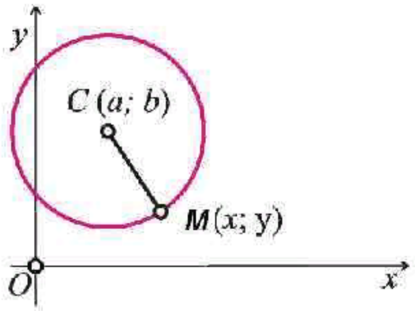
а) $|AB|=5$ б) $y=\frac{4}{3}x-7$ $k_1=\frac{4}{3}$ $y=-2x+13$ $k_2=-2$ в)

$\varphi=arctg(2)$

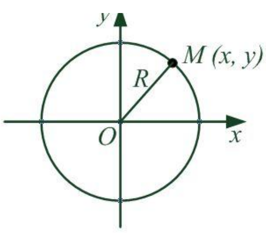
Кривые второго порядка

Окружность

Геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой *центром*.

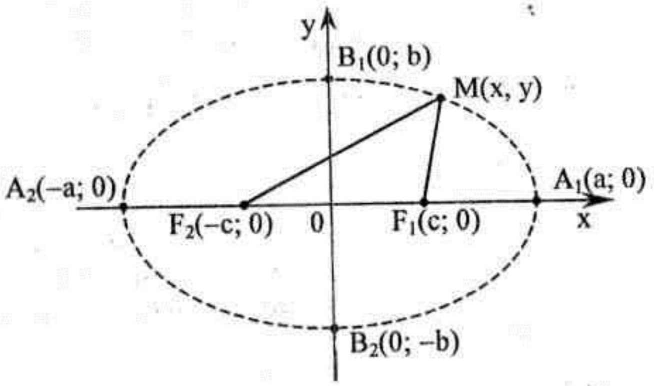


$$\boxed{(x-a)^2+(x-b)^2=r^2}$$



$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

Эллипс.
Геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

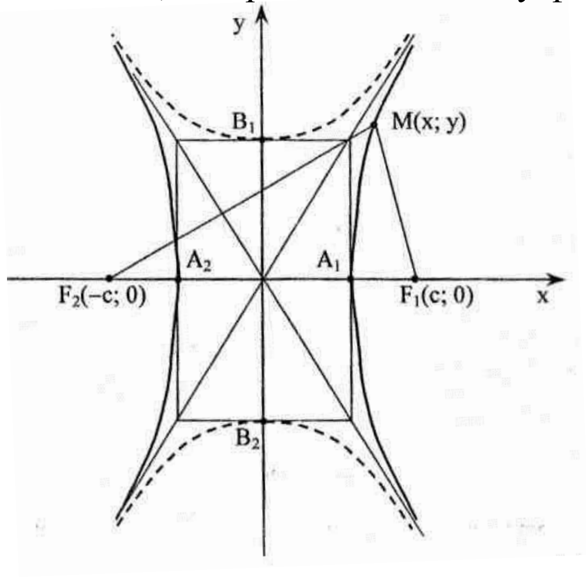


$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

При $b=a$ получаем окружность.

Вершины: $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ – точки пересечения с осями
Фокусы: $F_1=(c;\,0)$, $F_2=(-c;\,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (если a – большая полуось)
$c=\sqrt{b^2-a^2}$ (если b – большая полуось)
Эксцентриситет: $\varepsilon=c/a$ (если a – большая полуось)
$\varepsilon=c/b$ (если b – большая полуось)
Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Очевидно, что $0<\varepsilon<1$.
Если $\varepsilon\to 0$, то значит, что $b\to a$, т.е. эллипс приближается к окружности, если $\varepsilon\to 1$, то значит, что $b\to 0$, т.е. эллипс вытягивается вдоль большей оси.

Гипербола.
Геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

При $b = a$ получаем равностороннюю гиперболу.

Вершины: $A_1(a;\,0)$, $A_2(-a;\,0)$ – точки пересечения с действительной осью.

Пересечение прямых $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$ образуют основной прямоугольник.

Фокусы: $F_1 = (c;\,0)$, $F_2 = (-c;\,0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Эксцентриситет: $\varepsilon = c/a$

Эксцентриситет характеризует форму основного прямоугольника. Очевидно, что $\varepsilon > 1$.

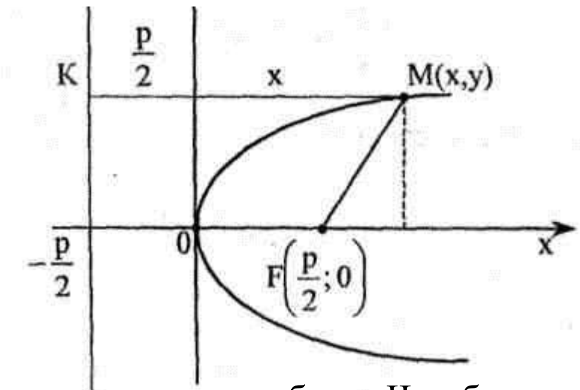
Если $b \to a$, то значит, что $\varepsilon \to \sqrt{2}$, т.е. прямоугольник приближается к квадрату,

если $b \to 0$, то значит, что, $\varepsilon \to 1$, т.е. прямоугольник вытягивается вдоль действительной оси.

Асимптоты: диагонали основного прямоугольника. Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Парабола.

Геометрическое место точек, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.



$$\boxed{y^2 = 2px}$$

p – параметр параболы. Чем больше по модулю p, тем шире область, лежащая внутри параболы. Если $p > 0$, то ветви параболы направлены вправо, если $p < 0$, то влево.

Вершина: $O(0;\,0)$

Фокус: $F(\frac{p}{2},\,0)$

Директриса: прямая $x = -\dfrac{p}{2}$.

Эксцентриситет: $\varepsilon = 1$

Таким образом,

для **окружности** $\varepsilon = 0$

для **эллипса** $\varepsilon < 1$,

для **параболы** $\varepsilon = 1$,

для **гиперболы** $\varepsilon > 1$.

Канонические уравнения линий второго порядка:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола

3) $y^2 = 2px$ парабола

4) $ax^2 - by^2 = 0$ пара пересекающихся прямых

5) $y^2 - a^2 = 0$ пара параллельных прямых

6) $y^2 = 0$ пара совпадающих прямых

Вопросы для закрепления материала

1. Какие виды уравнения прямой вы знаете?
2. Что такое угловой коэффициент?
3. Условие параллельности прямых?
4. Условие перпендикулярности прямых?

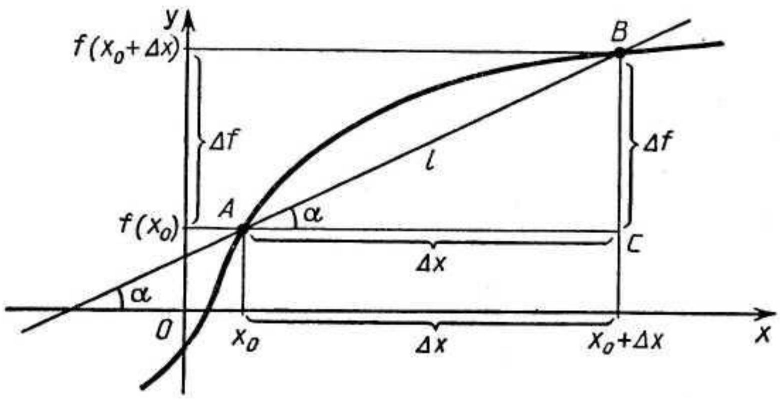
РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 5.1. Производная функции

Определение производной функции. Геометрический смысл производной. Механический смысл производной. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Производная сложной функции и обратных тригонометрических функций. Вторая производная и производные высших порядков

Производная и дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке. Возьмем точку x из этого промежутка, значение функции в этой точке будет $f(x)$. Если аргументу x дадим приращение Δx, тогда, новое значение функции будет $f(x+\Delta x)$. Тогда **приращение функции**: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.



Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения ее приращения Δy к соответствующему приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю (если этот предел существует)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Обозначения: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Производная функции характеризует скорость изменения функции (в данной точке).

Нахождение производной называется ***дифференцированием***.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется ***дифференцируемой*** в этой точке.

Дифференциал функции, это главная часть приращения функции Δy:

$$dy = y'dx$$

Правила дифференцирования и Таблица производных

u, v – дифференцируемые функции, ***c***– действительное число.

I. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$

II. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

III. $(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'$

IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

V. $(v(u))'=v'(u)\cdot u'$

Производные основных функций		*Производные сложных функций*	
1	$(c)'=0$		
2	$(x)'=1$		
3	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	16	$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
4	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	17	$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
5	$(e^x)'=e^x$	18	$(e^u)'=e^u\cdot u'$
6	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	19	$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
7	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	20	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
8	$(\cos x)'=-\sin x$	21	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
9	$(\sin x)'=\cos x$	22	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
10	$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	23	$(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
11	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	24	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
12	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	25	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$(\arccos\ x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	26	$(\arccos u)'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$(arctg\ x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	27	$(arctg\ u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$
15	$(arcctg\ \ x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$	28	$(arcctg\ u)'=\dfrac{-u'}{1+u^2}$

Пример

Найти производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных

а) $y = 5x^3 + \dfrac{6}{x^4} - 2$ б) $y = \ln x \cdot \cos x$ в) $y = \dfrac{e^x}{5^x}$

Решение:

а)В начале применяем правило II дифференцирования (производная суммы равна сумме производных). Далее применяем правило I дифференцирования (константу можно выносить за знак производной). При вычислении производных степенных функций удобно воспользоваться формулами свойства степеней (см. *Приложение*) и привести дроби (если это возможно) к виду x^n, где n – любое действительное число. Далее применяем формулы 3 и 1 из таблицы производных.

$$y' = \left(5x^3 + \frac{6}{x^4} - 2\right)' = \left(5x^3\right)' + \left(\frac{6}{x^4}\right)' - (2)' = 5(x^3)' + 6\left(x^{-4}\right)' - (2)' =$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 6 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} - 0 = 15x^2 - 24x^{-5} = 15x^2 - \frac{24}{x^5}$$

б)Т.к. исходная функция представляет собой произведение двух функций: $\ln x$ и $\cos x$, то сначала применим III правило дифференцирования (производная произведения двух функций). После этого воспользуемся соответствующими формулами таблицы производных.

$$y' = (\ln x \cdot \cos x)' = (\ln x)' \cdot \cos x + \ln x \cdot (\cos x)' = \frac{1}{x} \cdot \cos x + \ln x \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{x}\cos x - \ln x \cdot \sin x.$$

в)Т.к. исходная функция представляет собой частное двух функций: e^x и 5^x, то сначала применим IV правило дифференцирования (производная частного двух функций). После этого воспользуемся соответствующими формулами таблицы производных

$$y' = \left(\frac{e^x}{5^x}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' \cdot 5^x - e^x \cdot \left(5^x\right)'}{\left(5^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot 5^x - e^x \cdot 5^x \ln 5}{\left(5^x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot 5^x (1 - \ln 5)}{\left(5^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot (1 - \ln 5)}{5^x}$$

Ответ*:* *а)* $15x^2 - \dfrac{24}{x^5}$; б) $\dfrac{1}{x} \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x$; в) $\dfrac{e^x \cdot (1 - \ln 5)}{5^x}$

Пример Найти производную сложной функции

а) $y = \cos(3x)$ б) $y = \left(5x^4 - \cos x - 1\right)^2$

Решение*:*

а) Данная функция является сложной $v(u)$, где внешняя $v = \cos u$, а внутренняя $u = 3x$. Поэтому применяем V правило дифференцирования и формулу 21 таблицы производных.

$y' = \left(\cos(3x)\right)' = -\sin(3x)\cdot(3x)' = -\sin(3x)\cdot 3 = -3\cdot\sin(3x).$

б) Данная функция является сложной $v(u)$, где внешняя $v = u^2$, а внутренняя $u = 5x^4 - \cos x - 1$. Поэтому применяем V правило дифференцирования и формулу 16 таблицы производных

$$y' = \left(\left(5x^4 - \cos x - 1\right)^2\right)' = 2\cdot\left(5x^4 - \cos x - 1\right)^{2-1}\cdot\left(5x^4 - \cos x - 1\right)' =$$
$$= 2\cdot\left(5x^4 - \cos x - 1\right)\cdot\left(20x + \sin x\right).$$

Ответ: а) $-3\cdot\sin(3x)$; б) $2\cdot\left(5x^4 - \cos x - 1\right)\cdot\left(20x + \sin x\right)$

Производные высших порядков

Вторая производная (производная второго порядка), это производная от первой производной, т.е. $f'' = \left(f'\right)'$

Производная *n*-го порядка функции называется производная от производной (n-1)-го порядка данной функции. Она обозначается

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Пример

Найти значение $y'''(4)$, если $y = 5x^4 - 2x^2 + 3$.

Решение:

Находим поочередно первую, вторую и третью производные:

$$y' = \left(5x^4 - 2x^2 + 5\right)' = 5\cdot\left(x^4\right)' - 2\left(x^2\right)' + \left(3\right)' = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 0 = 20x^3 - 4x$$
$$y'' = (y')' = \left(20x^3 - 4x\right)' = 20\cdot 3\cdot x^2 - 4 = 60x^2 - 4$$
$$y''' = (y'')' = \left(60x^2 - 4\right)' = 60\cdot 2\cdot x - 0 = 120x$$

Вычисляем значение третьей производной в данной точке:

$y'''(4) = 120\cdot 4 = 480$.

Ответ: 480 .

Геометрический и физический смысл производной

Геометрический смысл:

Производная $f'(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Пример Найти уравнение касательной к кривой $y(x) = x^2 + 4x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$.

Решение: Найдем значение функции при $x = -3$:

$y_0 = y(-3) = (-3)^2 + 4(-3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

Найдем производную данной функции: $y'(x) = (x^2 + 4x + 5)' = 2x + 4$

Найдем $y'(-3) = 2 \cdot (-3) + 4 = -6 + 4 = -2$

Подставив полученные значения в уравнения касательной

$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, получим

$y - 2 = -2(x + 3)$, откуда

$2x + y + 4 = 0$ – уравнение касательной в точке с абсциссой $x_0 = -3$.

Ответ: уравнение касательной: $2x + y + 4 = 0$.

Физический смысл

Физический смысл производной $f'(t)$ от непрерывной функции $f(t)$ в точке t_0– есть мгновенная скорость изменения величины функции, при условии, что изменение аргумента Δt стремится к нулю.

Мгновенная скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t_0 есть производная от пути S по времени t в момент времени t_0: $v = S'_t(t_0)$.

Мгновенное ускорение прямолинейного движения материальной точки в момент времени t_0 есть вторая производная от пути S по времени t в момент времени t_0: $a = S''_t(t_0)$.

Пример Тело движется по закону $S(t) = 5t^3 + 4t^2 + 6t$. Определить его скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ с

Решение:

Найдем скорость движения: $v = S'(t) = (5t^3 + 4t^2 + 6t)' = 15t^2 + 8t + 6$

Найдем скорость движения в момент времени $t = 2$:

$v(2) = 15 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 6 = 82$ м/с.

Найдем ускорение движения: $a = v'(t) = S''(t) = (15t^2 + 8t + 6)' = 30t + 8$

Найдем ускорение движения в момент времени $t = 2$:

$a(2) = 30 \cdot 2 + 8 = 68$ м/с^2.

Ответ: $v(2) = 82$ м/с, $a(2) = 68$ м/с^2. .

Вопросы для закрепления материала

1. Что называют производной функции?
2. Как вычислить производные высших порядков?
3. Геометрический смысл производной?
4. Физический смысл производной?

Тема 5.2. Приложение производной

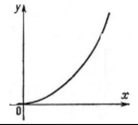
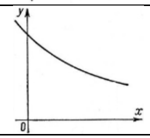
Исследование функции с помощью производной: интервалы монотонности и экстремумы функции. Асимптоты. Применение второй производной. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба. Общая схема исследования функций

Терема (достаточное условие возрастания функции)

Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X , $(f'(x) > 0)$ то она **возрастает** на этом промежутке.

Терема (достаточное условие убывания функции)

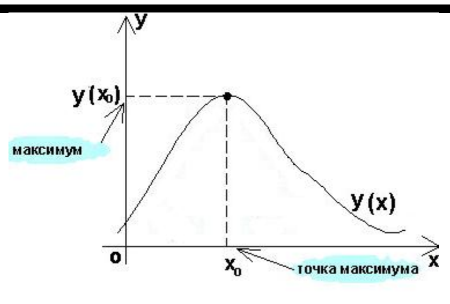
Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X $(f'(x) < 0)$, то она **убывает** на этом промежутке.

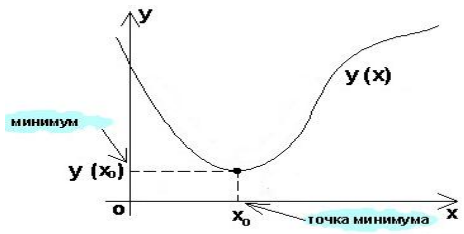
Знак производной на промежутке	**Поведение функции** $y(x)$	
$y' > 0$	$y(x)$ **возрастает**	
$y' < 0$	$y(x)$ **убывает**	

Точка x_0 называется точкой **максимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$. Значение функции в этой точке $f(x_0)$ называется **максимумом функции.**

Точка x_0 называется точкой **минимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$. Значение функции в этой точке $f(x_0)$ называется **минимумом функции.**

Максимум или минимум функции называются **экстремумом** функции

Поведение функции возле точки x_0	**Название** x_0	**Название** $y(x_0)$	**Пример**
$y(x) < y(x_0)$	точка **максимума**	**Максимум** функции	

<table>
<tr><td>$y(x) > y(x_0)$</td><td>точка
минимума</td><td>**Минимум**
функции</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>точка
экстремума</td><td>**Экстремум**
функции</td><td></td></tr>
</table>

Необходимо условие экстремума. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ($f'(x_0) = 0$) или не существовала.

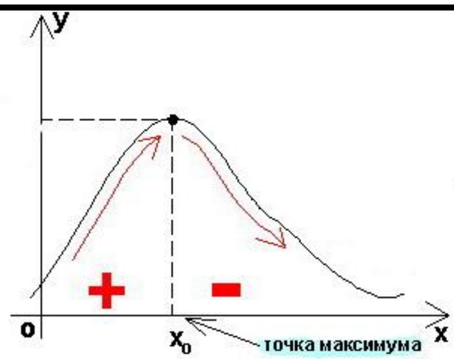
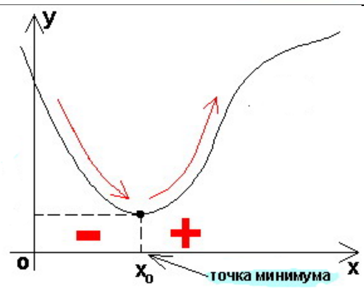
Точки, в которых производная равняется нулю или не существует называются **критическими**. Критическая точка вовсе не обязательно является точкой экстремума.

Первое достаточное условие экстремума если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет свой знак то x_0 – точка экстремума, при этом:

– если знак меняется с «+» на «–» то x_0 – точка **максимума,**

– если знак меняется с «–» на «+» то x_0 – точка **минимума.**

Второе достаточное условие экстремума Если первая производная дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0 ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в этой точке положительна ($f''(x) > 0$), то x_0 – точка **минимума** функции, если $f''(x) < 0$, то x_0 – точка **максимума** функции.

<table>
<tr><td colspan="2">y' меняет знак</td><td rowspan="2">**Название**
x_0</td><td rowspan="2">$y'(x_0) = 0$</td></tr>
<tr><td>*с*</td><td>*на*</td></tr>
<tr><td>+</td><td>–</td><td>точка **максимума**</td><td>
</td></tr>
<tr><td>–</td><td>+</td><td>точка **минимума**</td><td>
</td></tr>
</table>

Выпуклость функции. Точки перегиба

Говорят, что график функции $y = f(x)$ **выпуклый вверх** на некотором интервале, если в этом интервале график расположен **под** любой своей касательной.

Говорят, что график функции $y = f(x)$ **выпуклый вниз** на некотором интервале, если в этом интервале график расположен **над** любой своей касательной.

Достаточное условие выпуклости вверх графика функции. Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ вторая ее производная $f''(x)$ **отрицательна** на некотором интервале, то график этой функции **выпуклый вверх** на данном интервале.

Достаточное условие выпуклости вниз графика функции. Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ вторая ее производная $f''(x)$ **положительна** на некотором интервале, то график этой функции **выпуклый вниз** на данном интервале.

Теорема. достаточное условие существования перегиба. Если для функции $y = f(x)$ вторая ее производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в ноль ($f''(x_0) = 0$) и при переходе через эту точку меняет свой знак на противоположный, то эта точка x_0 является точкой перегиба.

Исследование функции

Пример Найти промежутки монотонности, выпуклости, точки экстремума и точки перегиба кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

Решение.

1) Найдем промежутки монотонности. Для этого вычислим производную и найдем промежутки ее знакопостоянства

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4\right)' = \frac{1}{3}3x^2 - 3\cdot 2x + 8\cdot 1 - 0 = x^2 - 6x + 8$$

Найдем точки, в которых производная равна нулю

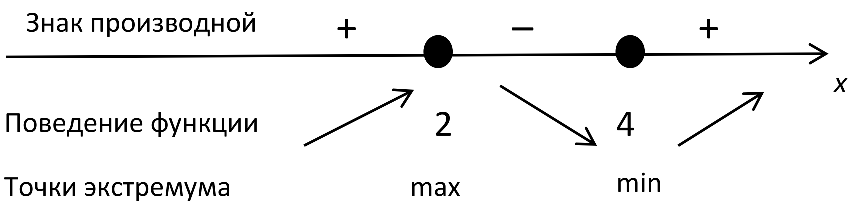
$x^2 - 6x + 8 = 0$

Решая квадратное уравнение, получаем: $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$. Значит, в этих точках производная функции равна нулю, следовательно, это точки, подозрительные на экстремум. Точно мы выяснить сможем, когда увидим, меняет ли знак производная, проходя через эти точки.

$y' = x^2 - 6x + 8$, т.к. корни найдены, то можно разложить на множители:

$y' = (x-2)(x-4)$

Подставляя любое число из промежутка в каждую скобку, получаем знак скобки и, учитывая это, определяем знак производной



$$y \nearrow \text{при} \quad x \in (-\infty;\, 2) \cup (4;\, +\infty)$$

$$y \searrow \text{при} \quad x \in (2;\, 4)$$

Т.к. производная, проходя через точки меняет знак, что они являются точками экстремума.

$x_{\max} = 2$, $\quad x_{\min} = 4$

2) Найдем точки перегиба. Для этого найдем вторую производную и промежутки ее знакопостоянства.

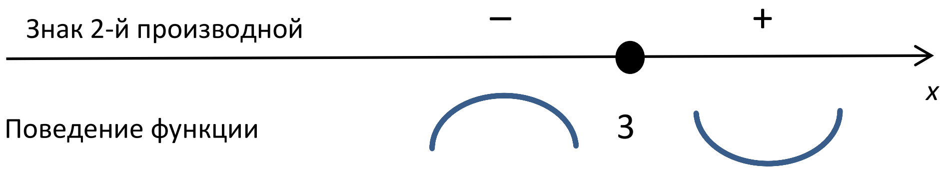
$y'' = \left(x^2 - 6x + 8\right)' = 2x - 6$

Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю

$y'' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0$

$x = 3$ - возможная точка перегиба



y выпукла вверх при $x \in (-\infty;\, 3)$

y выпукла вниз при $x \in (3;\, \infty)$

Т.к. вторая производная, проходя через точку $x = 3$ меняет знак, что эта точка является точкой перегиба.

<u>Ответ</u>.

$$y \nearrow \text{при} \quad x \in (-\infty;\, 2) \cup (4;\, +\infty); \qquad y \searrow \text{при} \quad x \in (2;\, 4)$$

$x_{\max} = 2$, $\quad x_{\min} = 4$ - точки экстремумов

y выпукла вверх при $x \in (-\infty;\, 3)$; $\qquad y$ выпукла вниз при $x \in (3;\, \infty)$

$x = 3$ - точка перегиба

Общая схема исследования функции и построения её графика

1. Найти область определения функции;
2. Проверить функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Найти точки пересечения графика с координатными осями (ось OX имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Исследовать функцию на монотонность и найти точки экстремума;
5. Найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
6. Найти асимптоты графика функции;
7. Построить график.

<u>Комментарии к схеме</u>:

6) **Асимптота** – это прямая, к которой приближаются точки графика функции при бесконечном удалении их от начала координат.

Вертикальная асимптота $\boxed{x=a}$ если: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$

Горизонтальная асимптота $\boxed{y=b}$ если: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$

Наклонная асимптота $\boxed{y=kx+b}$

если: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}=k \\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-kx\right)=b \end{cases}$ или $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=k \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-kx\right)=b \end{cases}$

Пример : Исследовать функцию $y=x^3+x^2-x-1$ и построить ее график.

<u>Решение</u>:

исследуем функцию по схеме:

1. $D(y)\left(-\infty;\infty\right)$
2. $y(-x)=(-x)^3+(-x)^2-(-x)-1=-x^3+x^2+x-1=-(x^3-x^2-x+1)\neq y(x)\neq -y(x)$

Значит, функция не является ни четной, ни нечетной; т.е. функция общего вида.

Также очевидно, что функция непериодическая

3. Найдем точки пересечения с (OX): $y = 0$

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x = -1 \quad u \quad x = 1$.

Найдем точки пересечения графика функции с осью (OY): $x = 0$

$$y(0) = 0^3 + 0^2 + 0 - 1 = -1;$$

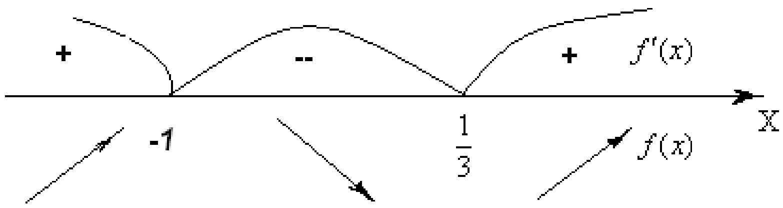
4. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y' = 3x^2 + 2x - 1$.

Найдем критические точки функции:

$3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Получим: $x_1 = -1 \quad u \quad x_2 = \frac{1}{3}$.

Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



$y \nearrow$ при $x \in (-\infty; -1) \; u \; (\frac{1}{3}; +\infty)$,

$y \searrow$ при $x \in (-1; \frac{1}{3})$.

$x_{\max} = -1, \quad x_{\min} = \frac{1}{3}$ - точки экстремумов

$y_{\max} = y(-1) = 0. \quad y_{\min} = y(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$ -экстремумы

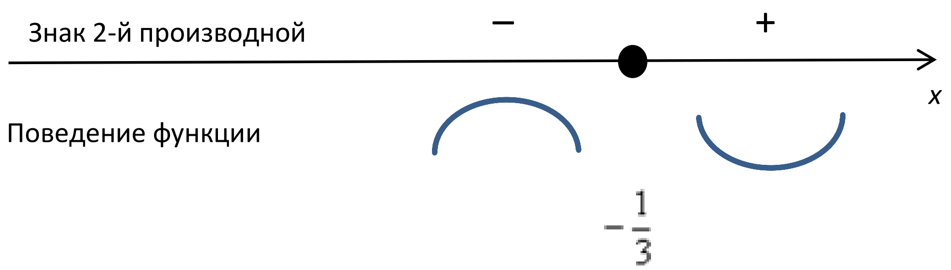
5. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную:

$$y'' = 6x + 2$$

Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю

$$6x + 2 = 0$$

$x = -\dfrac{1}{3}$ - возможная точка перегиба

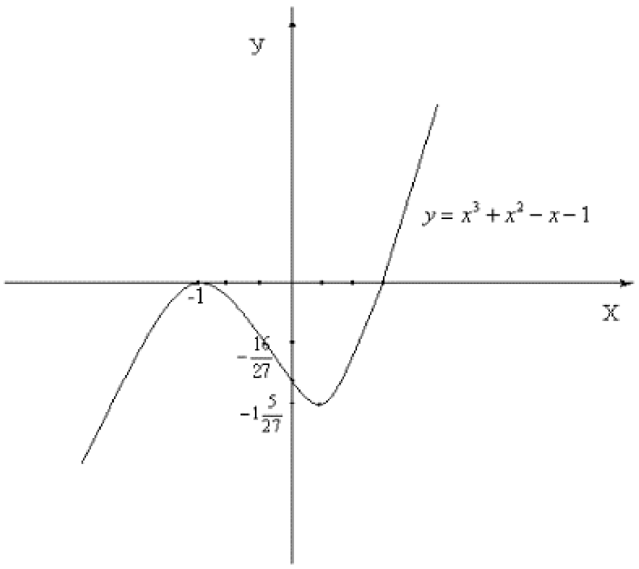


y выпукла вверх при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$

y выпукла вниз при $x \in \left(-\dfrac{1}{3}; \infty\right)$

Т.к. вторая производная, проходя через точку $x = -\dfrac{1}{3}$ меняет знак, что эта точка является точкой перегиба.

6. Асимптот нет;
7. Построим график:



Вопросы для закрепления материала

1. Связь производной и возрастанием функции (необходимое и достаточное условие возрастания функции)?
2. Связь производной и убыванием функции (необходимое и достаточное условие убывания функции)?
3. Что такое экстремум функции?
4. Необходимое и достаточное условие максимума функции?
5. Необходимое и достаточное условие минимума функции?
6. Достаточное условие выпуклости вверх?
7. Достаточное условие выпуклости вниз?
8. Достаточное условие существования точки перегиба?

РАЗДЕЛ 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 6.1. Неопределенный интеграл

Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод разложения, метод замены переменной.

Неопределенный интеграл

При интегрировании функций решается задача, обратная дифференцированию функций, а именно, по заданной производной восстанавливается та функция, которую продифференцировали.

Функция *F(x)* называется **первообразной** для функции *f(x)* на данном промежутке, если на этом промежутке выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема: Если функция ***F(x)*** является первообразной для функции ***f(x)*** на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции на этом промежутке задается формулой $F(x) + C$
где *C*– любое действительное число.

Выражение *F(x)+C* называется ***неопределенным интегралом*** от функции *f(x)* и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

читается: «*интеграл эф от икс по дэ икс*»
$\int$ - знак интеграла;
x – переменная интегрирования
***f*(*x*)** – подынтегральная функция;
f*(*x*)*dx – подынтегральное выражение.

Интегрирование– отыскание для функции всех ее первообразных.

Пример**:**
Для функции $f(x) = 2x$ первообразными являются множество функций вида $F(x) = x^2 + C$, т.к. $\left(x^2 + C\right)' = 2x$.

Т.е. $\int 2xdx = x^2 + C$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx, \qquad m \neq 0$

2. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица интегралов основных элементарных функций

1.	$\int dx = x + c$	8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$	9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
3.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	10	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	11.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$
5.	$\int e^x dx = e^x + c$	12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + c$
6.	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + c$		

Метод подстановки (замена переменной)

Суть этого метода состоит в том, чтобы введя новую переменную, получить интеграл, первообразная которого легко находится. В основном, для каждого конкретного интеграла замена переменной (подстановка) подбирается индивидуально.

Необходимо вычислить интеграл $\int f(x)dx$, используя подстановку $x = \varphi(t)$ - эта функция имеет непрерывную производную. Тогда $f(x) = f(\varphi(t))$, $dx = \varphi'(t)dt$. Формула замены переменной в неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример

Вычислить неопределенный интеграл непосредственным интегрированием, т.е. с помощью свойств интеграла и таблицы интегралов

$$\int \left(5x^2 - x + \frac{2}{x} - 8\right)dx$$

Решение**:**

Применяем 2-е свойство неопределенного интеграла и разбиваем исходный интеграл на сумму трех интегралов. После этого применяем 1-е свойство –

выносим постоянный множитель за знак интеграла. После этого применяем 1-ю, 2-ю и 3-ю формулы таблицы интегралов.

$$\int\left(5x^2-x+\frac{2}{x}-8\right)dx=5\int x^2dx-\int xdx+2\int\frac{dx}{x}-8\int dx=$$

$$=\frac{5x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-8x+c=\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}x+2\ln|x|-8x+c$$

Ответ. $\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}x+2\ln|x|-8x+c$

Пример Вычислить неопределенный интеграл методом подстановки $\int\frac{dx}{1-3x}$

Решение

$\int\frac{dx}{1-3x}$

Пусть $u=-3x$.

Продифференцируем обе части: $du=-3dx \quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{3}du$

Тогда $\int\frac{dx}{1-3x}=\int\frac{-\frac{1}{3}du}{u}=-\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{3}\ln|u|+c=-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+c$

Ответ. $-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+c$

Пример Вычислить неопределенный интеграл методом подстановки $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$

$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$ Пусть $u=5x-1\Rightarrow du=5dx\Rightarrow dx=\frac{1}{5}du$

Продифференцируем обе части: $du=5dx \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{1}{5}du$

Тогда $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-1}}=\int\frac{\frac{1}{5}du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{5}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{u}+c=\frac{2}{5}\sqrt{2x-3}+c$

Ответ. $\frac{2}{5}\sqrt{2x-3}+c$

Вопросы для закрепления материала

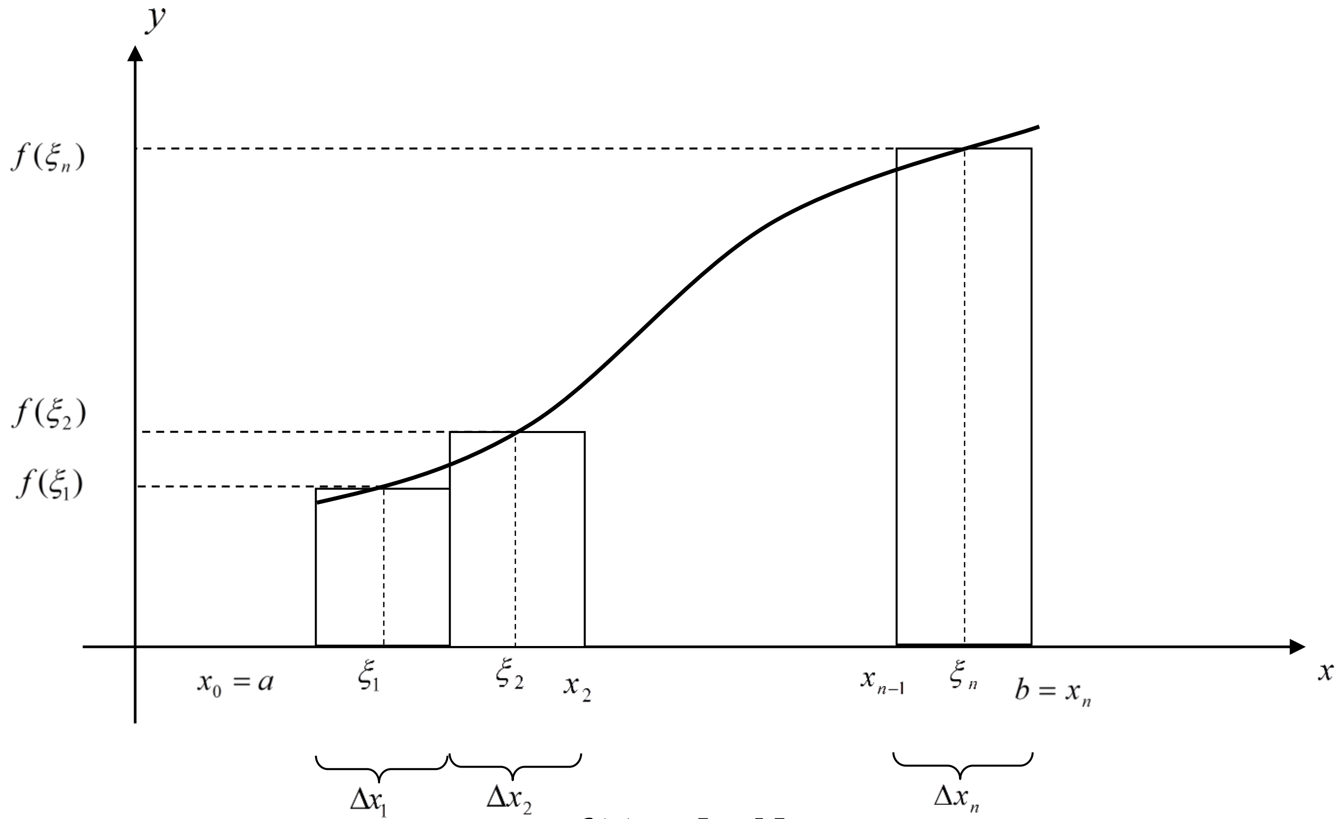
1. Что называют первообразной функции?
2. Что называют неопределенным интегралом?

Тема 6.2. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление геометрических, механических, физических величин с помощью определенного интеграла.

Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.
Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.
Выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и обозначим за Δx_k длину этого отрезка.



Интегральной суммой для функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется сумма вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральных сумм при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю.
(*т.е определенный интеграл – это ЧИСЛО*)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2. $\int_a^b mf(x)dx = m\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. $\int_a^a f(x)dx = 0$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

a, b, c – любые точки промежутка непрерывности ***f(x)***

Вычисление определенного интеграла

Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная от функции ***f(x)*** на **[*a, b*]**.

Для вычисления определенного интеграла применяется

формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример

Вычислить определенный интеграл: $\int_2^3 \left(6x^2 - 4x + 1\right)dx$

Решение**:**

Вычисляем определенный интеграл по всем правилам вычисления неопределенных интегралов, а после применяем формулу Ньютона-Лейбница.

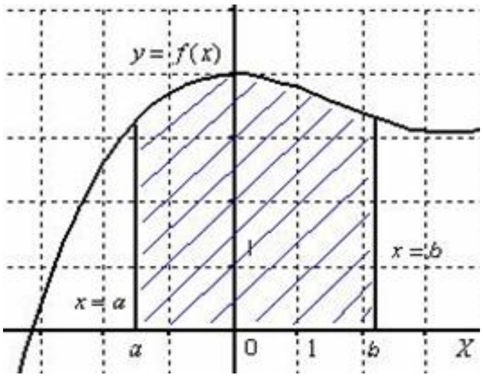
$$\int_2^3 \left(6x^2 - 4x + 1\right)dx = \left(6\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_2^3 = \left(2x^3 - 2x^2 + x\right)\Big|_2^3 =$$

$$= \left(2\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\right) - \left(2\cdot 2^3 - 2\cdot 2^2 + 2\right) = (54 - 18 + 3) - (16 - 8 + 2) = 39 - 10 = 29$$

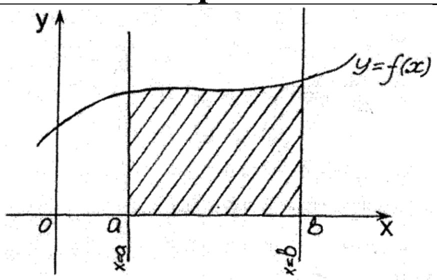
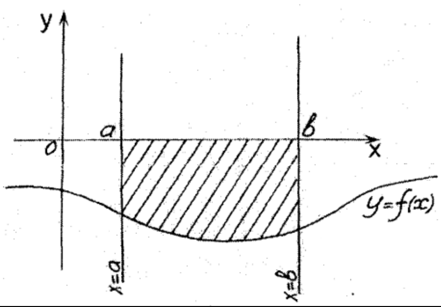
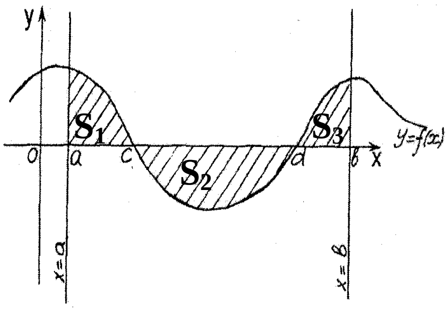
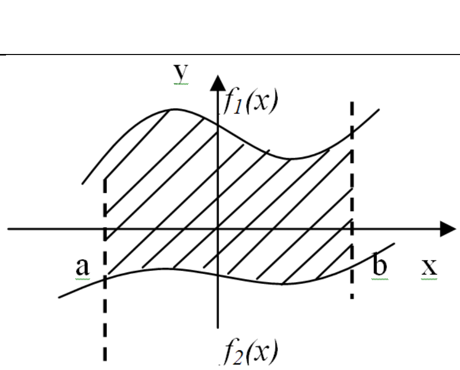
Ответ. 29

Применение определенного интеграла к вычислению площади плоских фигур

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная графиком некоторой функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми , $x = b$:



Определенный интеграл используется при вычислении **площадей криволинейных трапеций**.

Чертеж	Описание	Формула площади
	Криволинейная трапеция, ограниченная кривой ***y* = *f(x)***, осью ***OX*** и прямыми ***x* = *a*, *x* = *b*** лежит **над** осью ***OX.***	$S = \int_a^b f(x)dx$
	Криволинейная трапеция, ограниченная кривой***y* = *f(x)***, осью***OX***и прямыми ***x* = *a*, *x* = *b*** лежит **под** осью ***OX***	$S = -\int_a^b f(x)dx$
	График функции $y = f(x)$ пересекает ось OX в нескольких точках. Фигура разбивается на части, которые лежат полностью либо над осью *OX* либо полностью под осью *OX*. Вычисляются площади этих фигур и суммируются.	$S = S_1 + S_2 + S_3$
	Фигура ограничена сверху графиком функции $f_1(x)$, а снизу графиком функции $f_2(x)$	$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx$

Пример

С помощью определенного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 1$

Решение:

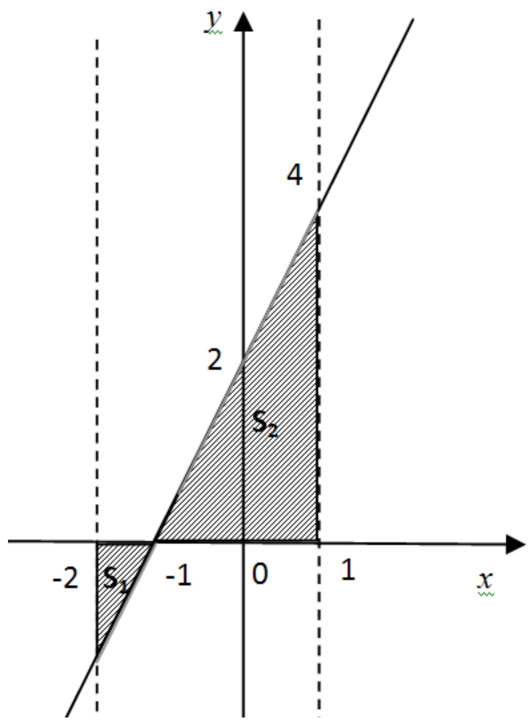
Найдем абсциссу точки, в которой функция пересекает ось OX.

Для этого приравняем функцию к нулю:

$2x + 2 = 0, \quad 2(x+1) = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x = -1$

Искомая фигура выделена на графике штриховкой. Часть фигуры лежит под осью OX (пусть площадь этой часть S_1), часть над осью OX (пусть площадь этой часть S_2).

Тогда площадь всей искомой фигуры будет сумма этих площадей: $S = S_1 + S_2$



Найдем S_1:

$$S_1 = -\int_{-2}^{-1}(2x+2)dx = -\left(\left(x^2 + 2x\right)\Big|_{-2}^{-1}\right) = -\left((1-2)-(4-4)\right) = -(-1) = 1 \text{ кв. ед.}$$

Найдем S_2:

$$S_2 = \int_{-1}^{1}(2x+2)dx = \left(x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = (1+2)-(1-2) = 3+1 = 4 \text{ кв.ед.}$$

Тогда, площадь искомой фигуры: $S = S_1 + S_2 = 1 + 4 = 5$ кв.ед.

Ответ: 5 кв. ед.

Вопросы для закрепления материала

1. Что называют определенным интегралом?
2. По какой формуле происходит вычисление определенного интеграла?
3. Какое применение определенного интеграла к вычислению площади плоских фигур?

РАЗДЕЛ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциал функции. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Понятие о дифференциальном уравнении. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общие и частные решения.

Общий вид дифференциального уравнения: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$

Общее решение дифференциального уравнения: $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка: $F(x, y, y') = 0$

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка: $y = f(x, C)$

Метод решения:

1. *Заменить* y' *на* $\dfrac{dy}{dx}$
2. *Разделить переменные*
3. *Проинтегрировать обе части равенства.*

Примеры:

1	2	3	4
$y' = f(x)$ $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ $dy = f(x)dx$ $\int dy = \int f(x)dx$	$y' = \phi(y)$ $\dfrac{dy}{dx} = \phi(y)$ $\dfrac{dy}{\phi(y)} = dx$ $\int \dfrac{dy}{\phi(y)} = \int dx$	$\phi(y)y' + f(x) = 0$ $\phi(y)\dfrac{dy}{dx} = -f(x)$ $\phi(y)dy = -f(x)dx$ $\int \phi(y)dy = -\int f(x)dx$	$\phi(y)\varphi(x)y' + f(x)\omega(y) = 0$ $\phi(y)\varphi(x)\dfrac{dy}{dx} = -f(x)\omega(y)$ $\dfrac{\phi(y)}{\omega(y)}dy = -\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ $\int \dfrac{\phi(y)}{\omega(y)}dy = -\int \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}dx$

Пример. Является ли решением дифференциального уравнения $y' + y = 1 + x$ функция $y(x) = e^{-x} + x$?

<u>Решение</u>*:*

Найдем производную функции $y(x) = e^{-x} + x$: $y' = -e^{-x} + 1$.

Подставим y и y' в уравнение $y' + y = 1 + x$:

$$-e^{-x} + 1 + e^{-x} + x = 1 + x;$$

$$1 + x = 1 + x.$$

Получили тождество: $1 + x \equiv 1 + x$.

Значит, функция $y(x) = e^{-x} + x$ является решением исходного дифференциального уравнения.

<u>Ответ</u>: является.

Пример Найти общее решение диф.уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{y'}{e^x} = \frac{1}{y^2}$$

Решение:

1. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y^2}$$

2. Разделим переменные, получим:

$$y^2 dy = e^x dx \ ,$$

3. Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int y^2 dy = \int e^{-x} dx,$$

$\frac{y^3}{3} = e^x + C$, отсюда

$$y = \sqrt[3]{3e^x + C}$$

Ответ: $y = \sqrt[3]{3e^x + C}$

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Основные методы решения

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка:

$$y = f(x, C_1, C_2)$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0}, \quad \text{где} \quad p, q - const$$

Решения такого уравнения находятся при помощи характеристического уравнения, которое получается из данного заменой производных на λ в соответствующей степени:

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$$

И, в зависимости от корней этого уравнения, записывается общее решение:

Корни характеристического уравнения	***Общее решение***
Действительные разные (D > 0) $\lambda_1, \quad \lambda_2$	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
Действительные равные (D = 0) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y = C_1 e^{\lambda x} + x \cdot C_2 e^{\lambda x}$
Пара комплексных сопряженных чисел (D < 0) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$	$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

Пример Найти общее решение диф.уравнения второго порядка
а) $y'' + y' - 2y = 0$, б) $y'' + 8y' + 16 = 0$ в) $y'' - 2y + 5 = 0$

Решение:
а) $y'' + y' - 2y = 0$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9 > 0$

$\lambda_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1, \qquad \lambda_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 - 3}{2} = -2$

Т.к. корни характеристического уравнения – два разных действительных числа, то общее решение диф.уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Подставив λ_1 и λ_2, получим: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

б) $y'' + 8y' + 16 = 0$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$

$D = 64 - 64 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{8 + \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \dfrac{8}{2} = 4$

Т.к. корни характеристического уравнения – два одинаковых действительных числа, то общее решение диф.уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$. Подставив $\lambda_1 = \lambda_2$, получим: $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$

в) $y'' - 2y + 5 = 0$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$D = 4 - 20 = -16 < 0$

$\lambda_1 = \dfrac{2 + \sqrt{16} \cdot i}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i, \qquad \lambda_2 = \dfrac{2 - \sqrt{16} \cdot i}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$

Т.к. корни характеристического уравнения – два сопряженных комплексных числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$, где $\alpha = 1$, а $\beta = 2$, то общее решение диф.уравнения имеет вид:

$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Подставив $\alpha = 1$ и $\beta = 2$, получим: $y = C_1 e^{x} \cos 2x + C_2 e^{x} \sin 2x$

<u>Ответ</u>: а) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$, б) $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$ в) $y = C_1 e^{x} \cos 2x + C_2 e^{x} \sin 2x$

Вопросы для закрепления материала

1. Что значит «*разделить переменные*»?
2. Как составить характеристическое уравнение?
3. Какая связь между корнями характеристического уравнения и видом общего решения диф.уравнения7

РАЗДЕЛ 8. РЯДЫ

Числовые ряды. Необходимый и достаточный признаки сходимости ряда. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов. Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды. Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов. Ряды Фурье. Тригонометрический ряд Фурье. Разложение в ряд Фурье функции, заданной в промежутке $0 \le x \le 2\pi$ *. Разложение в ряды Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике.*

Числовые ряды

Числовым рядом называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 1 + 4 + \ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Знакоположительный ряд – ряд, состоящий из положительных членов (предыдущие примеры)

Знакочередующийся ряд – ряд, знаки членов которого строго чередуются**.**

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$

Сходимость рядов

Частичной суммой ряда называется сумма первых ***n*** членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Числовой ряд называется **сходящимся**, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (т.е. предел равен конечному числу). Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется **расходящимся**.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, состоящий из его абсолютных величин.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд из его абсолютных величин расходится, то знакопеременный ряд называется **условно сходящийся**.

Признаки сходимости

1. Признак Даламбера. (для знакоположительных рядов)

Пусть дан числовой <u>знакоположительный</u> ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l \qquad \begin{cases} l>1, & \textit{ряд расходится} \\ l<1, & \textit{ряд сходится} \\ l=1, & \textit{требуются дополнительные исследования} \end{cases}$$

Пример. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$

Решение:

$$a_n=\frac{10^n}{n!}, \qquad a_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10\cdot 10^n}{n!\cdot(n+1)}$$

Найдем отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10\cdot 10^n}{n!\cdot(n+1)}\cdot\frac{n!}{10^n}=\frac{10}{n+1}$

Найдем предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0<1$, значит, по признаку Даламбера, ряд сходится.

Ответ: ряд сходится**.**

2. Признак сравнения. (для знакоположительных рядов)

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ такие, что $a_n<b_n$, тогда

1) если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то расходится и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$;

2) если $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

3. Признак Лейбница (для знакочередующихся рядов):

Если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ выполняются условия

а) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е. $|a_1|>|a_2|>|a_3|>\ldots$

б) общий член стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$, то ряд **сходится** и сумма ряда не превосходит по абсолютному значению абсолютной величины первого члена.

Если хотя бы одно условие не выполняется, то ряд **расходится**.

Пример. С помощью признака Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+7}$

Решение:

а) $|a_1| = \frac{1}{11}$, $|a_2| = \frac{1}{15}$, $|a_3| = \frac{1}{19}$ $\dots$

Очевидно, что $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \dots$. Т.е. члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n+7} = \left\langle \frac{1}{\infty} \right\rangle = 0$

Так как оба условия выполняются, то по признаку Лейбница данный знакочередующийся ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Степенной ряд

Степенной ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех x, при которых этот ряд сходится.

Эта область является симметричным интервалом относительно $x = 0$ на числовой оси $(-R, R)$, где $\boldsymbol{R}$ – **радиус сходимости степенного ряда**, который вычисляется по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{15^n}$

Решение:

$$a_n = \frac{1}{15^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{15^{n+1}} = \frac{1}{15^n \cdot 15}$$

Найдем отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{15^n} \cdot \frac{15^n \cdot 15}{1} = 15$

Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} 15 = 15$

Значит, радиус сходимости $R = 15$. Получаем, что исходный степенной ряд сходится в промежутке $(-15, 15)$

<u>Ответ</u>: сходится при $x \in (-15, 15)$.

<u>Разложение функций в степенные ряды</u>

Ряд Тейлора

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Ряд Маклорена

Если функция $f(x)$ определена при $x = 0$, и имеет в ней непрерывные производные любого порядка, то ее можно представить в виде степенного ряда, который называют рядом Маклорена (ряд Тейлора при ***a* = 0**):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

<u>Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций</u>:

Функция	**Ряд Маклорена**	**Область сходимости**
$e^x =$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$(-\infty, +\infty)$
$\sin x =$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x =$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$	$(-\infty, +\infty)$

$(1+x)^m =$	$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$	$(-1,1)$
$arctg\, x =$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$	$(-1,1)$
$\ln(1+x) =$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$	$(-1,1\,]$

Пример. Разложить функцию в ряд Маклорена $y=e^{5x}$

Решение:

Для функции $y=e^x$ имеем разложение:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

тогда для функции $y=e^{5x}$ разложение получим из предыдущего, заменив x на $5x$:

$$e^{5x}=1+5x+\frac{(5x)^2}{2!}+\frac{(5x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(5x)^n}{n!}+\ldots \text{ или}$$

$$e^{5x}=1+5x+\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\ldots+\frac{5^nx^n}{n!}+\ldots.$$

Ответ: $e^{5x}=1+5x+\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\ldots+\frac{5^nx^n}{n!}+\ldots.$

Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ в промежутке изменения аргумента $0 \le x \le 2\pi$ (или $-\pi \le x \le \pi$) называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

где

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ – *коэффициенты Фурье.*

Функция $f(x)$ – периодическая с периодом 2π

Тригонометрический ряд достаточно рассматривать только для значений x в промежутке $0 \le x \le 2\pi$ (или $-\pi \le x \le \pi$), т.к. за пределами указанного промежутка значений аргумента величина каждого члена пяда периодически повторяется.

Разложение фукнции, представляющей сложное периодическое движение, в тригонометрический ряд имеет важное значение а прикладных науках. Такое разложение в тригонометрический ряд называется гармоническим анализом.

Чтобы разложить периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π в тригонометрический ряд, нужно найти коэффициенты этого ряда, которые вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Пример.

Разложить функцию в ряд Фурье $y = x$ на промежутке $0 \le x \le 2\pi$

Решение.

Разложение в ряд Фурье на интервале $0 \le x \le 2\pi$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\pi\frac{\sin n2\pi}{n} + \frac{\cos n2\pi}{n^2} - \left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-2\pi\frac{\cos n2\pi}{n} + \frac{\sin n2\pi}{n^2} - 0\right) = -\frac{2}{n}$$

Окончательно, получаем: $$x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}\sin nx$$

Примечание:
$cos(\pi n) = (-1)^n$ $\quad$ $cos(2\pi n) = 1$ $\quad$ $sin(\pi n) = 0$

Ответ. $x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}\sin nx$

Вопросы для закрепления материала

1. Какой рад называется сходящимся?
2. Какой ряд называется знакоположительным?
3. Какой ряд называется знакочередующимся?
4. В чем заключается Признак Даламбера сходимости рядов?
5. В чем заключается Признак сравнения сходимости рядов?
6. В чем заключается Признак Лейбница сходимости рядов?
7. Какие ряды называют степенными?
8. Что такое радиус сходимости степенного ряда?
9. Что такое тригонометрический ряд Фурье?

РАЗДЕЛ 9. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Предмет дискретной математики. Место и роль дискретной математики в системе математических наук и в решении задач. Элементы и множества. Задание множеств. Операции над множествами. Свойства операций над множествами. Отношения. Свойства отношений. Диаграммы Эйлера-Венна

Термин «*Дискретный*» произошел от латинского слова ***discretus*** – прерывистый, состоящий из отдельных частей.

Дискретная математика изучает дискретные величины, а также объекты, их свойства, состояния и связи между ними при помощи дискретных величин.

Изучение дискретной математики способствует формированию фундаментальных теоретических знаний, необходимых для изучения предметов, связанных с теорией вероятности и статистикой, компьютерными системами и сетями, базами данных, программированием.

Множества

Множество – совокупность, набор некоторых элементов, объединенных некоторым признаком, свойством.

Пример:

- X = {А, О, И, Ы, Ю, Я, Э, У, Е, Ё} – множество гласных букв русского алфавита.
- $M = \{1, 2, 3, 4\}$ – множество целых чисел из отрезка [1, 4].
- Множество балок в сооружении.
- Множество студентов в техникуме и т.д.

Подмножество – часть исходного множества. Элементы подмножества обладают дополнительным признаком или свойством.

Пример:

- Множество студентов вашей группы является подмножеством множества студентов техникума.
- Множество железобетонных балок в сооружении является подмножеством всех балок этого сооружения.
- Множество женщин (как и множество мужчин) – есть подмножество множества людей на Земле.

Универсальное множество – множество U, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента. Обозначение – $\varnothing$.

Равными называют два множества A и B, состоящие из одинаковых элементов.

Пример:

- равны два множества букв, из которых составлены слова «НАВЕС» и «ВЕСНА».

Мощность множества – число элементов множества.

Пример:

- возьмем множество X = {А, О, И, Ы, Ю, Я, Э, У, Е, Ё}, его мощность равна 10. $|X| = 10$
- возьмем множество M = {1, 2, 3, 4} , тогда его мощность равна 4. $|M| = 4$
- пустое множество не содержит элементов, поэтому его мощность равна нулю. $|\varnothing| = 0$.

Диаграммы Эйлера-Венна

Чтобы наглядно изображать множества, английский математик Джон Венн (1834-1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Намного раньше Эйлер (1707-1783) для изображения отношений между множествами использовал круги. Позднее такие изображения получили названия **диаграмм Эйлера-Венна**.

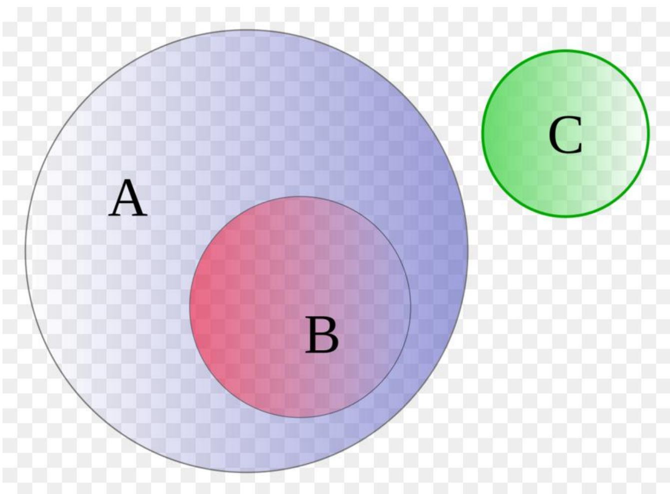
Диаграммы – очень удобный инструмент, позволяющий изображать множества и иллюстрировать операции над ними. Это геометрические представления множеств.

Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри него – кругов или каких-либо других замкнутых фигур, представляющих множества, входящие в универсальное. Фигуры находятся в определенном положении по отношению друг к другу. В наиболее общем случае они пересекаются. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, обозначают элементы соответствующих множеств.

Все множества на диаграммах обозначаются, как обычно, заглавными буквами латинского алфавита. Построив диаграмму, обычно штрихуют определенные области для обозначения вновь образованных множеств, или выделяют это множество каким-либо другим способом.

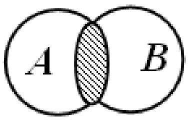
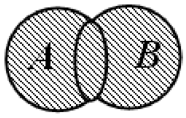
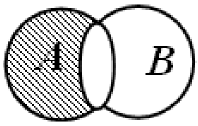
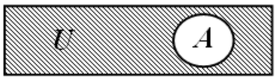
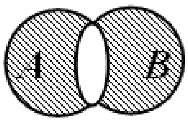
Пример:
На этой диаграмме видны отношения между множествами A, B и C:

Множество B является подмножеством множества A.
Множество C не имеет общих элементов с множествами A и B.



Основные операции над множествами

Из каких-либо данных множеств A и B можно построить новые множества с помощью операций объединения, пересечения, вычитания и др.

Название операции	**Обозначение**	**Изображение диаграммами Эйлера-Венна**	**Определение**
Пересечение множеств	$A \bigcap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *одновременно A* и *B*
Объединение множеств	$A \bigcup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств *A* и *B*
Разность множеств	$A \setminus B$		Те и только те элементы множества *A*, которые *не принадлежат* множеству *B*
Дополнение к множеству *A*	$\overline{A}$		Те и только те элементы, которые *не принадлежат* множеству *A* (т.е. дополняют его до универсально множества *U*)
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: либо А либо В, но не являются общими элементами этих множеств.

Пример Даны множества $A = \{2,4,5,8,9\}$ и $B = \{0,1,2,3,4,5\}$. Найти $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ и $\overline{A}$ если *U* – множество всех цифр, т.е. $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Решение:

$$A \bigcup B = (2,4,5,8,9) \bigcup (0,1,2,3,4,5) = (0,1,2,3,4,5,8,9)$$

$$A \bigcap B = (2,4,5,8,9) \bigcap (0,1,2,3,4,5) = (2,4,5)$$

$$A \setminus B = (2,4,5,8,9) \setminus (0,1,2,3,4,5) = (8,9)$$

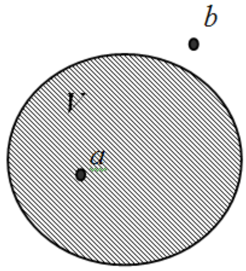
$$A \Delta B = (2,4,5,8,9) \Delta (0,1,2,3,4,5) = (0,1,3,8,9)$$

$$\overline{A} = (0,1,3,6,7)$$

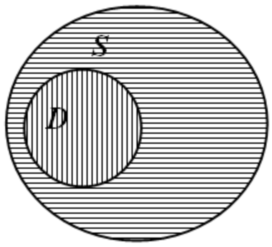
Ответ: $A \bigcup B = (0,1,2,3,4,5,8,9)$ $A \bigcap B = (2,4,5)$ $A \setminus B = (8,9)$

$A \Delta B = (0,1,3,8,9)$ $\overline{A} = (0,1,3,6,7)$

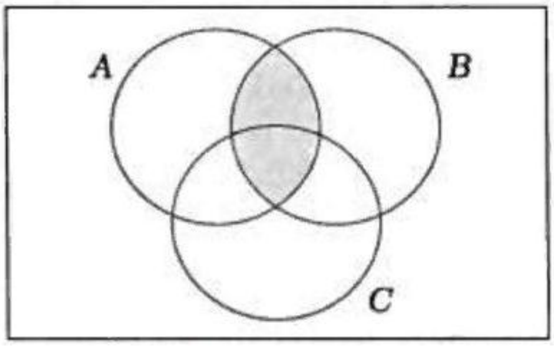
Пример: Построить диаграммы Эйлерра-Венна



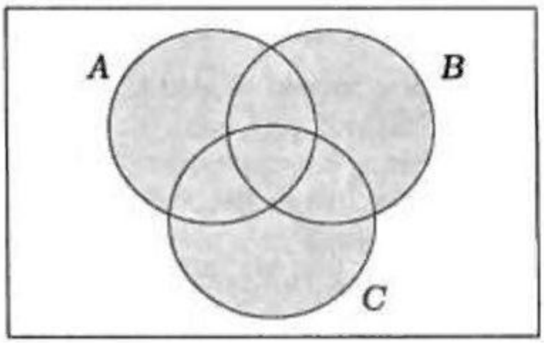
т. ***a*** принадлежит множеству V ($a \in V$), а т. ***b*** не принадлежит множеству V ($b \notin V$).



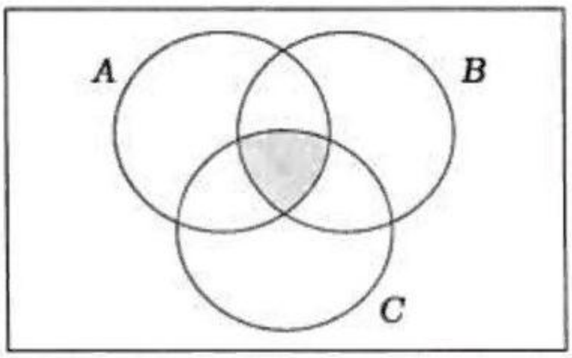
Множество ***D*** является подмножеством множества ***S*** ($D \subset S$)



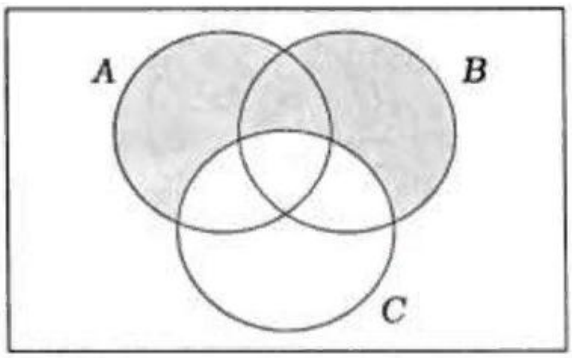
$A \cap B$



$A \cup B \cup C$



$A \cap B \cap C$



$(A \cup B) \setminus C$

Вопросы для закрепления материала

1. Что называют подмножеством некоторого множества?
2. Какое множество называют пустым?
3. Какое множество называют универсальным?
4. Для чего нужны диаграммы Эйлера-Венна?
5. Перечислите и охарактеризуйте основные операции над множествами.

РАЗДЕЛ 10. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Элементы комбинаторного анализа: размещения, перестановки, сочетания. Формула бинома Ньютона. Случайные события. Вероятность события. Простейшие свойства вероятности.

Задачи математической статистики. Случайная величина и закон ее распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Элементы комбинаторики

Пусть у нас имеется ***n*** элементов ($n > m$)

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же ***n*** элементов, которые отличаются только порядком их расположения.

$\boldsymbol{P_n}$ – число перестановок из ***n*** элементов **(учитывается порядок)**

$$P_n = n!$$

Пример В коробке 7 разных цветных карандашей, уложенных в ряд. Сколькими способами можно упаковать коробку, так, чтобы каждый раз был новый цветовой порядок раскладки карандашей?

(*найти количество перестановок 7 карандашей в коробке*)

Решение: Понятно, что в данном случае мы имеем дело с перестановками, поэтому ответом будет

$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ способов.

Размещениями называют комбинации, составленные из ***m*** различных элементов, выбранных их большего числа элементов ***n*** (порядок учитывается).

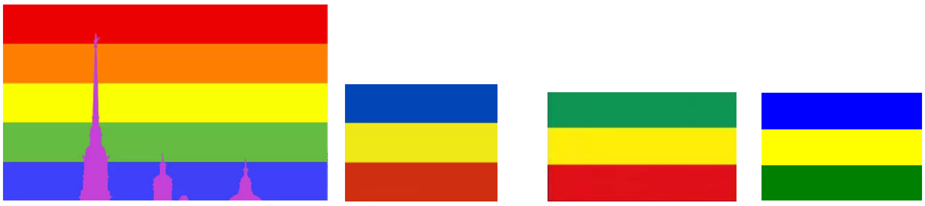
Число размещений A_n^m из ***n*** элементов по ***m*** элементов (порядок учитывается) вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример

Во вновь появившемся государстве существует 5 национальных цветов. Государственным структурам необходимо придумать один из элементов государственной символики – флаг. Флаг может состоять из трех горизонтальных полос разных национальных цветов. Сколько вариантов флага могут придумать государственные структуры?

(*Найти количество возможных трехполосных гос.флагов из 5 цветов*)



Решение: В данном случае мы должны выбирать из 5 цветов по 3, причем порядок учитывается, т.к. если одни и те же цветовые полосы на флагах расположены в разном порядке, то это разные флаги. Поэтому ответом будет

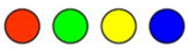
$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ вариантов флага.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из ***m*** различных элементов, выбранных их большего числа элементов ***n*** (порядок не учитывается).

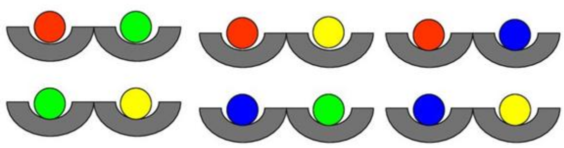
Число сочетаний C_n^m из ***n*** элементов по ***m*** элементов (порядок не учитывается) вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример В урне 4 шара: красный, зеленый, желтый и синий. Вынимают одновременно сразу два шара. Сколько вариантов того, каким образом выберут эти два шара?

Решение. Из четырех  по два , не учитывая порядок:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{24}{4} = 6$$



<u>**Формула бинома Ньютона**</u>

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$$

C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, …., C_n^{n-1}, C_n^{n} называют **биномиальными коэффициентами**

Биноминальные коэффициенты легко находятся из **Треугольника Паскаля:**

Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5
\end{array}
$$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

…

$(a+b)^0 =$	1	1
$(a+b)^1 =$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2 =$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 =$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 =$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 =$	…	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6 =$	…	....

Элементы теории вероятностей

Испытание – совокупность обстоятельств или действий для достижения определенной цели.
Элементарное событие – возможный исход испытания.
События обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C,..
Иногда с индексами: A_1, A_2.. B_1, B_2 ….

Пример:
Испытание: подбрасывание монеты
Все возможные элементарные события: A - монета упадет вверх «орлом» или B - монета упадет вверх «решкой».

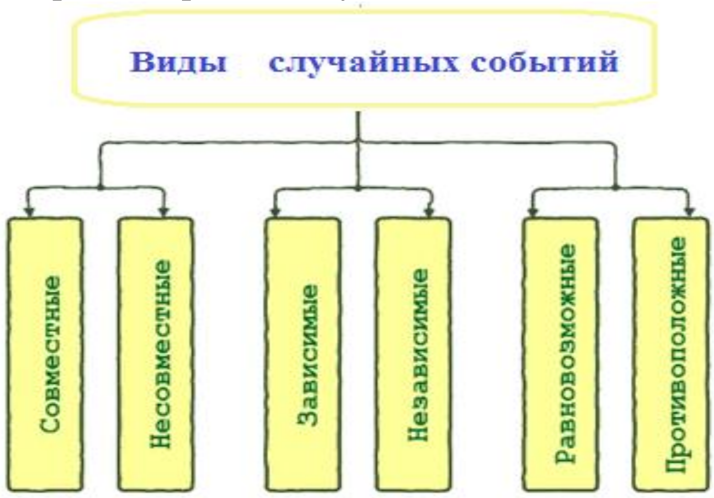
Пример:
В урне 4 шара: белый, черный, красный, зеленый.
Испытание: из урны вынимают 1 шар.
Все возможные элементарные события: A - вынули белый шар; B - вынули черный шар; C - вынули красный шар или D - вынули зеленый шар.

Если перечислить все возможные элементарные события, которые могут произойти при каком-то испытании, то в совокупности (все вместе) их называют ***Полной группой событий*.**

Предвосхищая различные события в жизни, мы часто говорим «скорее всего, это произойдет», «это невозможно», «наверняка, это случится», «вероятнее всего, будет так», «невероятно!» и т. д. Наблюдаемые нами события(явления) можно разделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Виды событий		
Достоверные	**Невозможные**	**Случайные**
событие, которое **обязательно** произойдет	событие, которое не произойдет **никогда**	событие, которое может произойти либо не произойти.
Пример. 1. При бросании игрального кубика выпадет число, меньшее 9; 2. Завтра взойдет солнце. 3. После января наступит февраль.	Пример 1. В урне 3 белых и 4 синих шара. Из урны вынули желтый шар. 2. Нечетное число разделилось без остатка на 2; 3. После зимы наступит осень.	Пример 1. При бросании игрального кубика выпадет число 2; 2. На экзамене по математике студент получит оценку «5»; 3. Человек в лотерею выиграет приз

Рассмотрим подробнее **случайные** события и их виды.



Несовместные события: если появление одного из них **исключает** появление других событий в одном и том же испытании. Т.е. они не могут произойти одновременно при одном и том же испытании.
Например*, бросая игральную кость, можно рассмотреть такие два события А- четного числа очков и В - выпадение нечетного числа очков. События А и В несовместны.*

В противном случае события называют **совместными,** т.е. **если наступление одного из них не исключает наступления другого.**
Например*, бросая игральную кость, можно рассмотреть такие два события А- выпадение четного числа и В - выпадение числа очков, кратных трем. Выпало «6», значит и событие А произошло и событие В тоже произошло, т.к. 6 четное и кратно 3 (делится на 3).*

Независимые события – наступление одного события никак не зависит от наступления или ненаступления другого события.
Например*, игральную кость бросают два раза подряд. Что выпадет во второй раз абсолютно не зависит от того, что выпалов первый раз. Поэтому, к примеру, такие два события как А- выпадение «2» в первый раз и В – выпадение «5» во второй раз абсолютно не зависят друг от друга.*
Или, например, стрелки стреляют в цель. Попадание или непопадание какого-либо стрелка абсолютно не зависит от попадания или непопадания в цель других стрелков. Поэтому, к примеру, такие два события как А- первый стрелок попал в цель и В – третий стрелок не попал в цель абсолютно не зависят друг от друга.

Зависимые события – наступление одного события зависит от наступления или ненаступления другого события.
Например*, в урне несколько разноцветных шаров. Вынимают по очереди шары из урны. Достанут ли очередной шар определенного цвета, зависит от того, какие шары достали до этого.*

События называют **равновозможными,** если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.
Например, в урне несколько разноцветных шаров (каждого цвета – один шар). Вынимают один шар. Вынимание шара каждого цвета – события равновозможные.

Противоположные события – если одно из двух событий обязательно должно произойти, причем наступление одного исключает наступление другого. Обозначаются A и $\overline{A}$.
Например, *стрелок стреляет в цель. Пусть событие А – стрелок в цель попал, тогда событие* $\overline{A}$ *– стрелок в цель не попал. Очевидно, что попадание и непопадание – два противоположных события. Также очевидно, что это два возможных исхода испытания.*
Например, стрелок стреляет в цель 5 раз. Пусть событие А- стрелок не попал ни разу, тогда событие $\overline{A}$ *– стрелок в цель попал* ***хотя бы*** *один раз.(хотя бы один раз – это значит, что он мог попасть один раз, два раза, три раза, четыре или все пять раз)*

Вероятность события. Свойства вероятности

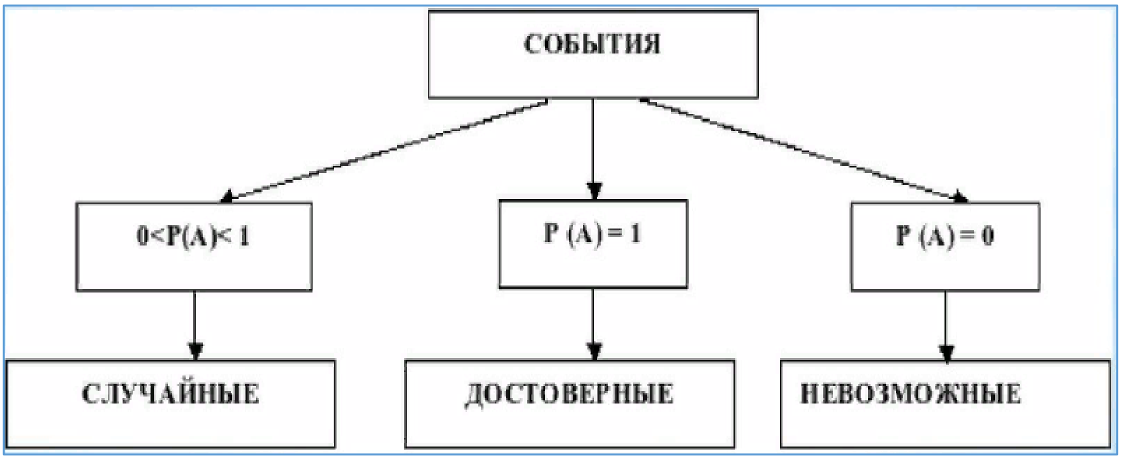
Вероятность события, рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности

Обозначим
n- общее число всех возможных исходов испытания.
m- число исходов, благоприятствующих появлению события A.

Тогда **вероятность появления события *А*** будет определяться формулой

$$P(A)=\frac{m}{n}$$ – *классическая вероятность*



Свойства вероятности

1. Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицу.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. *P (A)* = 1, тогда и только тогда, когда *A* – достоверное событие.

3. *P (A)* = 0, тогда и только тогда, когда *A* – невозможное событие.

4. Для любого события *A* и противоположного ему $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Сложение вероятностей

Суммой $\boldsymbol{A + B}$ двух случайных событий называется событие, когда **<u>наступает хотя бы одно из них</u>**

<u>*A* **ИЛИ** *B*</u>

Пример 1. В ящике лежат цилиндр, конус, куб и пирамида. Из ящика берут наугад одну фигуру.
Возможные элементарные события:
A – взяли цилиндр,
B – взяли конус,
C – взяли куб,
D – взяли пирамиду.
Событием *A+B* будет событие, когда взяли какое-то тело вращения: цилиндр **или** конус.

Теоремы сложения вероятностей.
Вероятность суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Сумма всех элементарных событий испытания (<u>полная группа событий</u>) образует <u>достоверное событие</u>.

Следствие 1
Если события A_1, A_2, … ,A_n в сумме образуют <u>полную группу</u>, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Следствие 2
Сумма вероятностей противоположных событий и $\bar{A}$ равна единице.

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Умножение вероятностей

Произведением $\boldsymbol{A\cdot B}$ двух случайных событий называется событие,
<u>когда *A* и *B* наступают одновременно</u>

<u>*A* **И** *B*</u>

Пример

Два стрелка производят выстрелы по мишени.
События:

A - первый стрелок попал в цель, $\bar{A}$ – первый стрелок не попал в цель,

B – второй стрелок попал в цель, $\bar{B}$ - второй стрелок не попал в цель

Событием $A\cdot B$ будет событие, когда оба стрелка попали в цель.

Событием $\bar{A}\cdot\bar{B}$ будет событие, когда никто не попал в цель.

Теорема
Вероятность одновременного появления двух <u>**независимых**</u> событий равна произведению вероятностей этих событий**:**

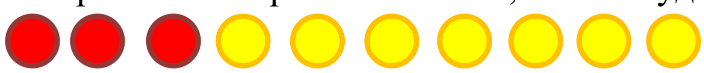
$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

Следствие. Вероятность появления <u>нескольких</u> событий, **независимых в совокупности**, вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n)$$

Пример

В урне лежат 10 шаров. Из них 3 красные, а 7 желтые. Из урны вынимают наугад один шар. Какова вероятность того, что он будет желтым?



<u>Решение</u>.

Пусть ***A* – искомое событие**, т.е. то событие, вероятность которого мы ищем, т.е. событие *A* – вытащили желтый шар.
Общее число возможных исходов – очевидно, 10, т.к. в урне 10 шаров, значит вытащить шар можно 10 раз.
Значит, $n=10$**.**

Число исходов, благоприятствующих тому, что вытащат желтый шар 7, т.к. в урне 7 желтых шаров.

Значит, $m = 7$**.**

Тогда вероятность появления события *А* (т.е. вероятность того, что вытащат именно желтый шар) вычисляется по формуле классической вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{10} = 0.7$$

Ответ. 0,7

Пример В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение.

Пусть ***А*** **– искомое событие**, т.е. вынули выигрышный билет

Общее число возможных исходов ***n*** = 1000.

Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет ***m*** = 200.

Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2\,.$$

Ответ: 0,2.

Пример В случайном эксперименте монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

Решение**.**

Пусть ***А*** **– искомое событие (**орел выпадет ровно один раз**)**

Перечислим все возможные исходы, когда монету дважды подкидывают

(О – орел, Р - решка): ОО РР ОР РО

Значит, всех возможных исходов ***n*** = 4

Число исходов, благоприятствующих появлению события *А,* ***m*** = 2: ОР и РО

Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5.

Пример На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов *A, B* и *C*. Вероятность поступления контрольной работы из города *A* равна 0,6, из города *B* - 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города *C*.

Решение.

Итак, обозначим события:

A - контрольная работа поступила из города *A*. По условию *P(A)*= 0.6
B - контрольная работа поступила из города B. По условию *P(B)*= 0.1
C - контрольная работа поступила из города C. *P(C) - ?*
Очевидно, что события A, B и C образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице:
P(A)+ P(B)+ P(C) = 1
Подставляя числовые значения, получим
$0{,}6 + 0{,}1 + P(C) = 1$, откуда
$P(C) = 1 - 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}3$.
Ответ. 0,3

Пример Вероятность того, что день будет ясным, $0{,}85$. Найти вероятность того, что день будет облачным.
Решение.
Очевидно, что события «день ясный» и «день облачный» противоположные, поэтому обозначим:
A - день ясный. По условию *P(A)*= 0.85
$\overline{A}$ - день облачный. $P(\overline{A}) = ?$
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$, поэтому,
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}85$
$P(\overline{A}) = 0{,}15$

Ответ. 0,15

Пример В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
Решение. Пусть A – искомое событие
B - из первой урны извлечен белый шар; $P(B) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$
C - из второй урны извлечен белый шар. $P(C) = \dfrac{7}{12}$
Тогда $A = B \cdot C$
Очевидно, что события B и C независимы.
Тогда
$$P(A) = P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$
Ответ. $\dfrac{7}{30}$

Пример На пункте контроля работают четыре контроллера. Вероятность того, что первый контроллер пропустит брак, равна 0,15, второй 0,13, третий 0,19, четвертый 0,2. Найти вероятность того, что

а) ни один контроллер не пропустит брак

б) хотя бы один котроллер пропустит брак

в) только два первых контроллера пропустят брак

Решение.

Пусть

A – искомое событие

B_1 - первый контроллер пропустит брак. По условию $P(B_1) = 0{,}15$

$\overline{B_1}$ - первый контроллер не пропустит брак.

$P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

B_2 - второй контроллер пропустит брак. По условию $P(B_2) = 0{,}13$

$\overline{B_2}$ - второй контроллер не пропустит брак.

$P(\overline{B_2}) = 1 - P(B_2) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$

B_3 - третий контроллер пропустит брак. По условию $P(B_3) = 0{,}19$

$\overline{B_3}$ - первый контроллер не пропустит брак.

$P(\overline{B_3}) = 1 - P(B_3) = 1 - 0{,}19 = 0{,}81$

а) A – искомое событие, т.е. ни один контроллер не пропустит брак, тогда

$A = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}$

Т.к. пропустит какой-то контроллер брак или не пропустит, абсолютно не зависит от того, пропустит ли другой контроллер брак или не пропустит, то все события B_i - независимы и все $\overline{B_i}$ независимы, поэтому,

$$P(A) = P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(\overline{B_3}) = 0{,}85 \cdot 0{,}87 \cdot 0{,}81 \approx 0{,}6$$

б) A – искомое событие, т.е. **хотя бы один** котроллер пропустит брак

Описание A в этой ситуации довольно громоздко, и, как следствие, и решение тоже громоздко. Т.е. в этой ситуации искомое событие получается такое – первый пропустил, а остальные нет; или второй пропустил, а остальные нет; или третий пропустил, а остальные нет; или первый и второй пропустили, а третий нет; или первый и третий пропустили, а второй нет; или второй и третий пропустили, а первый нет; или все три пропустили, т.е.

$$A = B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3 + + B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot B_3 + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot B_3 + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$$

В этой ситуации (когда задача содержит фразу «**хотя бы один**») удобно решать через противоположное событие.

Противоположное нашему событию – это событие, когда **никто не пропустил** брак:

$$\overline{A} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}$$

Вероятность этого события найти гораздо легче, и мы его уже находили в пункте **а)**

$\overline{A} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} \approx 0{,}6$, значит,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

в) A – искомое событие, т.е. только два первых контроллера пропустят брак

$$A = B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3}$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B_3}) = 0{,}15 \cdot 0{,}13 \cdot 0{,}81 \approx 0{,}016$$

<u>Ответ</u>. **а)** 0,6; **б)** 0,4; **в)** 0,016

<u>Случайные величины</u>

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z , а их возможные значения буквами x, y. z.

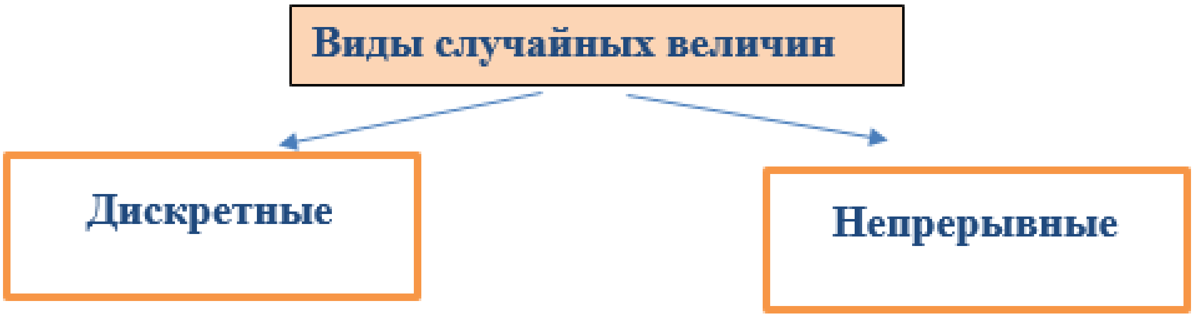
Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так *:* x_1, x_2, x_3.

Пример.

Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие значения: 0,1,2,3...100.

В этом примере случайная величина X может принимать одно из возможных значений: 0,1,2, 3, …100. Эти значения отделены друг от друга промежутками, в которых нет возможных значений X (*не может количество мальчиков или девочек быть дробным числом)*

Таким образом, <u>в этом примере случайная величина принимает отдельные изолированные возможные значения</u>



Дискретной (непрерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определёнными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Закон распределения дискретной случайной величины

Случайная величина может быть задана *законом распределения*.

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения дискретной случайной величины обычно записывается так:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

1.Значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ записываются в таблице, как правило, в порядке возрастания (или убывания), т.е. упорядочены. Такой ряд распределения называется **ранжированный.**

2.Сумма вероятностей этих событий, т.е. сумма чисел из второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

!!!!

Эту запись можно записать с помощью математического символа **суммы**: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Знак $\sum$ означает, что идет суммирование. Справа от этого символа пишутся элементы, которые являются слагаемыми.
В данной ситуации это вероятности p_1, p_2, p_3, и т.д. Поэтому их можно записать в общем виде p_i, где вместо числового индекса поставим букву ***i***.
Подразумевается, что ***i*** принимает значения: 1, 2, 3, 4 и т д. Это и пишется внизу и вверху символа $\sum$. Внизу пишут начальное значение ***i***, а вверху – последнее значение ***i***.

Например, если нам нужно просуммировать

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10}$,

то короче это можно записать: $\sum_{i=1}^{10} p_i$

Характеристики случайной величины

Математическое ожидание $M[X]$ дискретной случайной величины X называется ее ***среднеожидаемое значение*** при многократном повторении испытаний, вычисляемое по формуле:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Т. е. если испытание проводится много раз, то, чем больше провести испытаний, тем ближе среднее значение x будет к значению математического ожидания.

Пример.

Из партии бревен в 500шт измеряют диаметр у 20 штук случайным образом. Результаты показали следующее: 219мм – 5шт, 220мм – 8шт, 221мм – 3шт, 222мм –4шт.

Вероятности: $p_1 = \dfrac{5}{20} = 0.25$, $p_2 = \dfrac{8}{20} = 0.4$, $p_3 = \dfrac{3}{20} = 0.15$, $p_4 = \dfrac{4}{20} = 0.2$

Ряд распределения:

x_i	219	220	221	222
p_i	0,25	0,4	0,15	0,2

Математическое ожидание:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 219\cdot 0{,}25+220\cdot 0{,}4+221\cdot 0{,}15+222\cdot 0{,}2=$$

$$=54{,}75+88+33{,}15+44{,}4=220{,}3\text{мм}$$

Дисперсией D называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения. Дисперсия представляет собой меру разброса элементов совокупности вокруг среднего значения.

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2 \quad \text{т.е.} \quad D[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i-(M[X])^2$$

Средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из дисперсии. Среднее квадратическое отклонение является, как и дисперсия, мерой разброса элементов совокупности, но измеряется, в отличие от дисперсии, в тех же единицах, которые используют для измерения значений случайной величины.

$$\sigma=\sqrt{D}$$

Пример.
Дано распределение дискретной случайной величины X . Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

x_i	5	6	7	8
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1

Решение.

Математическое ожидание находим по формуле:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 5\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}6+7\cdot 0{,}2+8\cdot 0{,}1=6{,}3$$

Дисперсию найдем по формуле:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i-\left(M(X)\right)^2=5^2\cdot 0{,}1+6^2\cdot 0{,}6+7^2\cdot 0{,}2+8^2\cdot 0{,}1-6{,}3^2=$$

$$=2{,}5+21{,}6+9{,}8+6{,}4-39{,}69=0{,}61$$

Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}61}\approx 0{,}78$$

Ответ: $M(X)=6{,}3,\quad D(X)=0{,}61,\quad \sigma=0{,}78$

Вопросы для закрепления материала

1. Перечислите формулы комбинаторики.
2. Какие виды событий вы знаете?
3. Какие виды случайных событий вы знаете?
4. Что такое вероятность события?
5. Свойства вероятности.
6. Что такое сумма событий? Как вычисляется ее вероятность?
7. Что такое произведение событий? Как вычисляется его вероятность?
8. Виды случайных величин.
9. Что такое закон распределения дискретной случайной величины?
10. Какие характеристики случайной величины вы знаете?

Литература.

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2015.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для прикладного бакалавриата. - 11-е изд., пер. и доп. - М.: Юрайт, 2015.
3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов / Н.В. Богомолов. – 10-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. - 7-е изд., испр. - М.: Издательство АСТ: Мир и Образование, 2016.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для студ. учрежде-ний сред. проф. образования/ В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – 7-е изд., стереот. - М.: Из-дательский центр "Академия", 2017.
6. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Изда-тельский центр "Академия", 2016.
7. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образо-вания/ С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под ред. В.А. Гусева. – 11-е изд., стер. – М.: Изда-тельский центр "Академия", 2015.
8. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. обра-зования. - 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр "Академия", 2014.
9. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образо-вания/ М.С. Спирина, П.А. Спирин — 9-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Акаде-мия», 2013